Maxwell denklemlerini intagral bicimlerinin elde edilmesinde Stokes ve Diverjans Teoremlerinden yararlanilir.

Stokes Teoremi aşağıdaki gibi ifade edilir, bir $\vec{F}$ vektörüne ait yüzey integrali ile çizgi integrali arasındaki ilişkiyi ortaya koyar

$$\int_s (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}}) \cdot \overrightarrow{ds} = \oint_c \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

Diverjans teoremi ise bir $\vec{F}$ vektörüne ait hacim ve yüzey İntegralleri arasındaki ilişkiyi ortaya koyar ve

$$\int_v \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{F}}\, dv = \oint_s \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{ds}$$

biçiminde ifade edilir.

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}$$

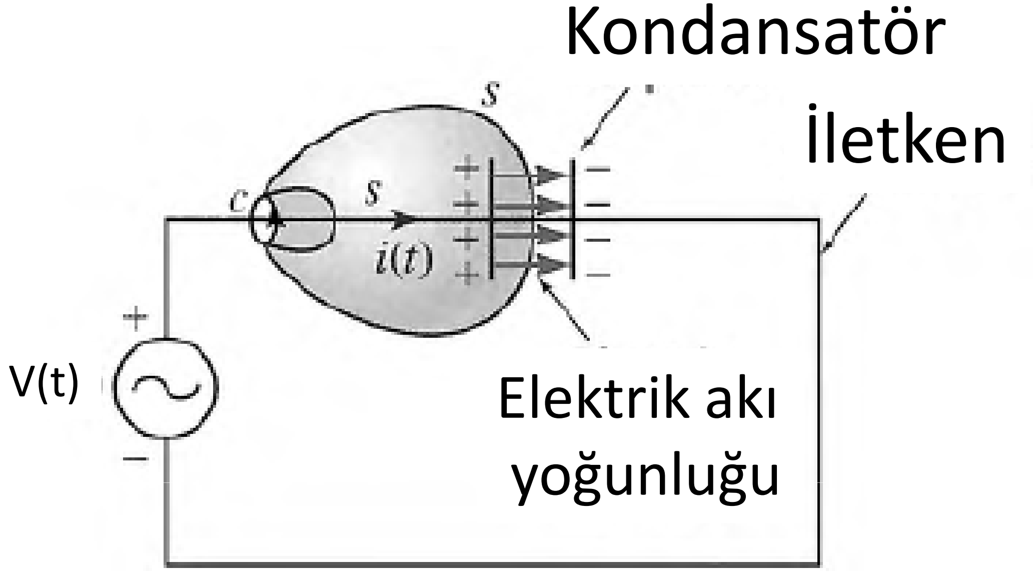
Maxwell denklemlerinden yukarıdaki Ampere devre Yasasına Maxwell in yaptığı katkı Yerdeğiştirme

Akımı olarak ifade edilen $\frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}$ terimidir. Bu ifade

Zamana bağlı olarak değişen elektrik alanın da bir manyetik alan oluşturacağını anlatır.

$\vec{\mathbf{J}}$ ise iletkenlik akımına karşılık gelir.

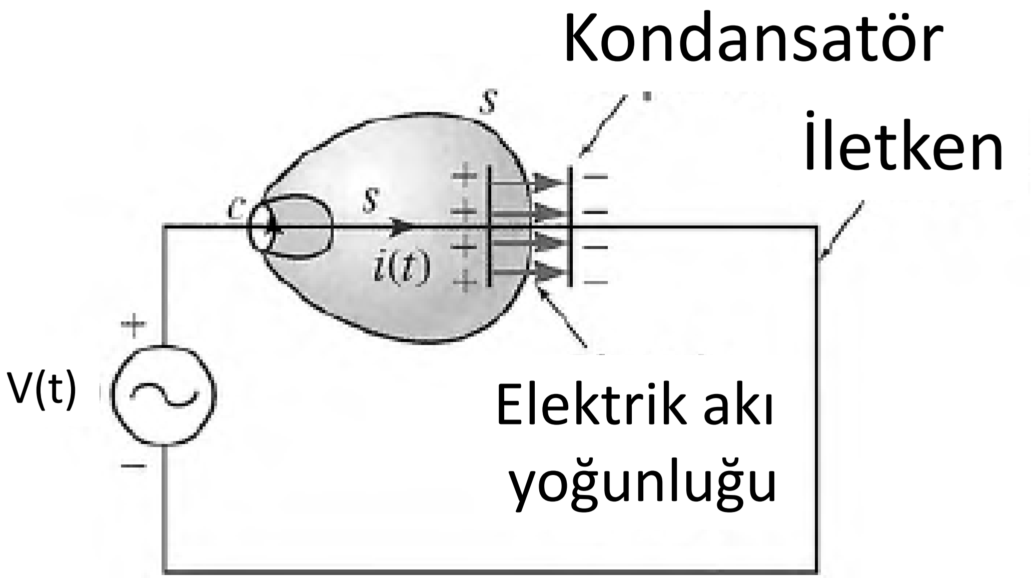
Maxwell “yerdeğiştirme akımı” katkısını niçin yapmışıtır?



Şekildeki kondansatör devresine zamanlar değişen bir potansiyel uygulandığında kondansatör plakalarına zamana bağlı olarak yük birikmesi söz konusu olacaktır. Tabi ki devrede zamana bağlı bir i(t) akımı olmalıdır. Bu akım Ampere Yasası olarak

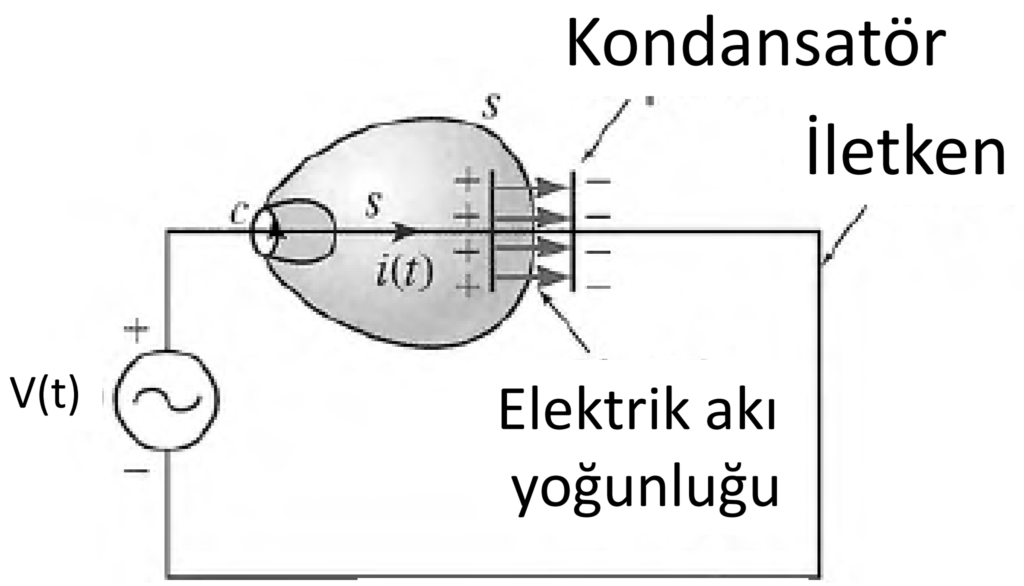
bildiğimiz $\oint_c \vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{d\ell} = i$ ifadesinin bir gereği olarak zamanla değişen bir manyetik

alana sebep olmalıdır.



$\oint_c \vec{\mathbf{H}} \cdot \overrightarrow{d\ell} = i$ ifadesi şekildeki c kapalı eğrisiyle snırlanmış s yüzeyi için geçerli iken, kondansatör plakaları arasında kalan bölgeyi kapsayacak bir büyük S yüzeyi için ise

$\oint_c \vec{\mathbf{H}} \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0$ sonucunu verir.



Kondansatör dışında $\oint_c \vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{d\ell} = i$

kondansatör plakaları arasında ise $\oint_c \vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{d\ell} = 0$
olması durumu bir çelişkidir.
Bunun ortadan kaldırılması için kondansatör plakaları arasında iletkenlik akımı olmasa da başka bir akım olmalıdır
İşte Maxwell bu akımı "yerdeğiştirme akımı" olarak tanımlamıştır

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho_v$$ Gasuss Yasası

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{J}} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$ olarak verilen süreklilik denkleminde yazılırsa

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{J}} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{\mathbf{D}})$$ olur, diverjans ve

türev işlemleri yer değiştirilir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{J}} = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}\right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\mathbf{J}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}\right) = 0$$

sonucuna ulaşılır.

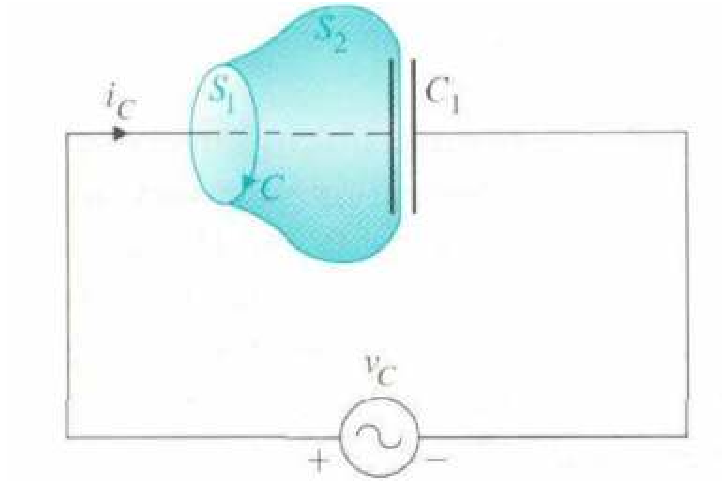
dolayısıyla Maxwell in katkısıyla Ampere Yasası

$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ biçiminde ifade edilir. Eşitliğin

sağ tarafı TOPLAM AKIMDIR yani İLETKENLİK AKIMI ve

YERDEĞİŞTİRME AKIMININ TOPLAMIDIR.

Örnek 6.6



ÖRNEK : Boş uzayda elektrik alan şiddeti

$\vec{H} = H_0 \sin\theta \vec{a}_y$ A/m olarak veriliyor.

Yerdeğiştirme akım yoğunluğunu ve elektrik alan şiddetini bulunuz.

ÖRNEK :Kaynaktan bağımsız yalıtkan bir ortamda elektrik alan şiddeti

$$\vec{\mathbf{E}} = C\cos(\omega t - \beta z)\vec{\mathbf{a}}_x \ \mathrm{V/m}$$

olarak veriliyor. Hangi şartlarda bu alan var olabilir? Diğer alanları bulunuz.

SINIR KOŞULLARI (BOUNDARY CONDITIONS)

$$E_{1t} = E_{2t} \qquad (\mathrm{V/m});$$

$$\mathbf{a}_{n2} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \qquad (\mathrm{A/m}).$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \qquad (\mathrm{C/m^2}),$$

$$B_{1n} = B_{2n} \qquad (\mathrm{T}).$$

İki kayıpsız ortam arasındaki sınır koşulları

$$E_{1t} = E_{2t} \longrightarrow \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

$$H_{1t} = H_{2t} \longrightarrow \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$D_{1n} = D_{2n} \longrightarrow \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$$

$$B_{1n} = B_{2n} \longrightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

ÖDEV: Kayıpsız ortam nedir?
ÖDEV: Bir yalıtkan ve bir mükemmel iletken arayüzünde sınır koşulları ne olur?
ÖDEV: ALIŞTIRMA 6.5 i yapınız.

Poynting Teoremi

$$\vec{\mathbf{F}} = q(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}})$$

Lorentz kuvveti

$$dW = q(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}}) \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

$$\overrightarrow{d\ell} = \vec{\mathbf{u}}\, dt \qquad dW = P\, dt$$

$$(\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}}) \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0.$$

$$\begin{aligned} P &= q(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}}) \cdot \vec{\mathbf{u}} \\ &= q\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{E}} \end{aligned}$$

$$dP = \rho_v\, dv\, \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{E}} \cdot \rho_v \vec{\mathbf{u}}\, dv$$

$$p = \frac{dP}{dv} = \vec{\mathbf{J}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$$

Güç yoğunluğu

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$ Maxwell denkleminden hareketle

$$\vec{J} \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

eşitliğin her iki tarafı elektrik alan vektörü ile skaler çarpılırsa

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$$ vektör eşitliği kullanılarak (bakınız alan teorisi dersi)

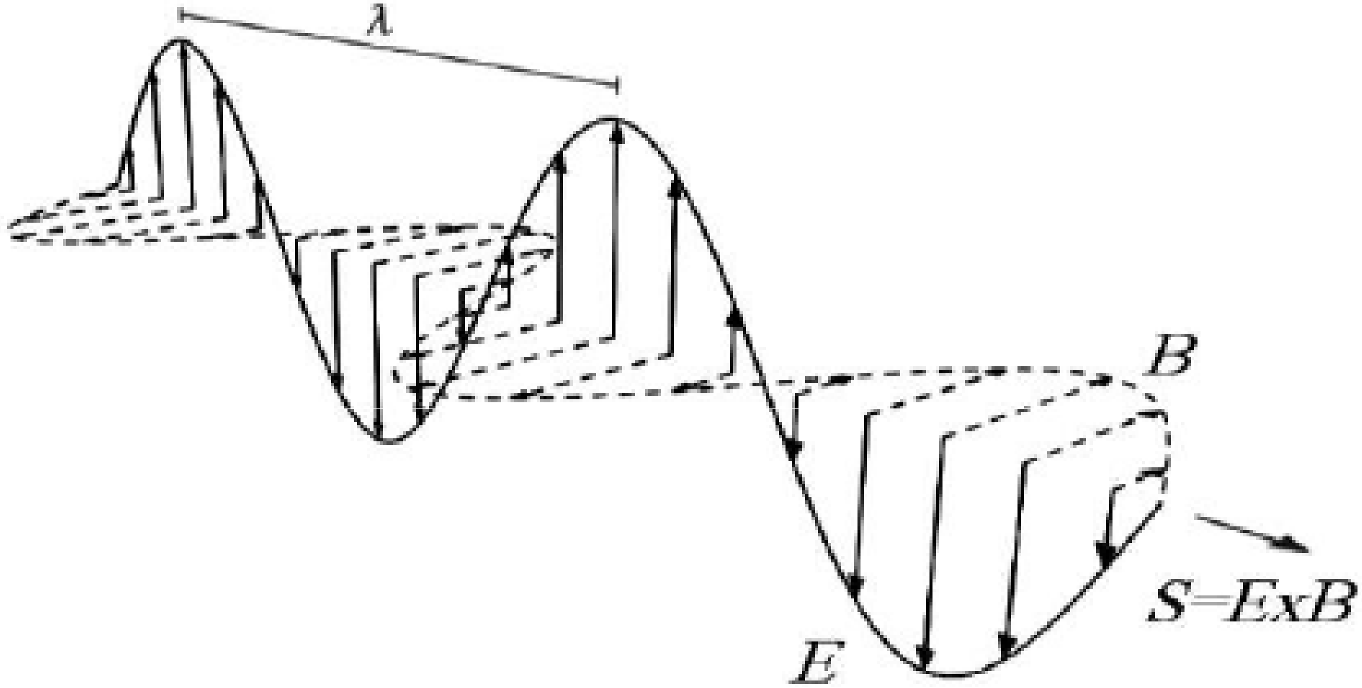
$$\vec{J} \cdot \vec{E} = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$ sonucuna ulaşılır.

Bu eşitlikteki

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$ çarpımı Ponyting vektörü olarak adlandırılır

Görüldüğü üzere bu vektör elektrik ve manyetik alan şiddeti vektörlerine diktir. birimi de W/m^2 dir

Poynting vektörü elektromanyetik dalganın ilerleme yönündedir.



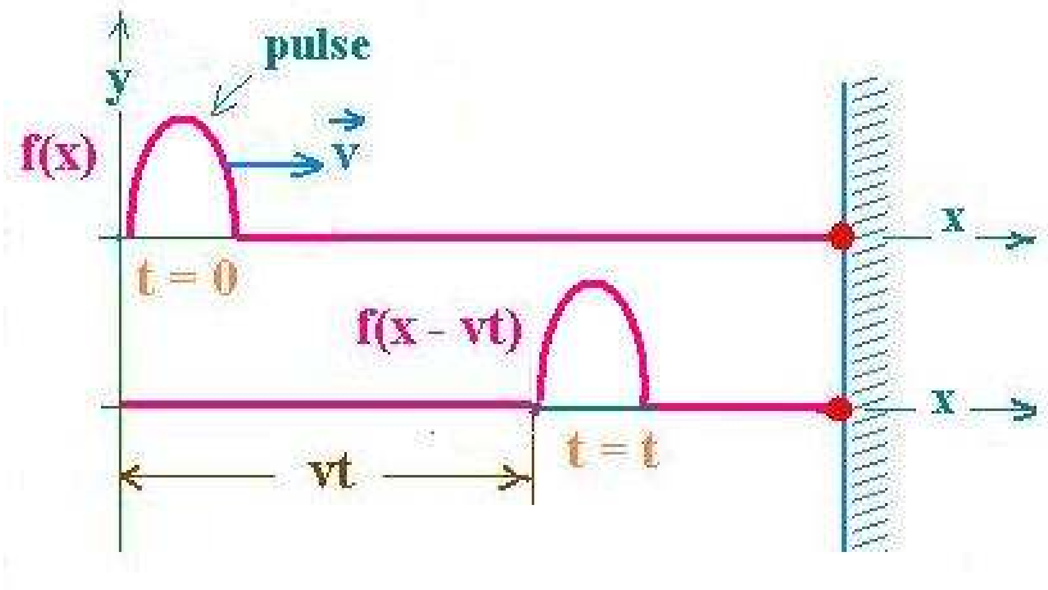
ÖRNEK : Yalıtkan bir ortamda elektrik alan şiddeti $\vec{\mathbf{E}} = E\cos(\omega t - kz)\,\vec{\mathbf{a}}_x$ V/m,

olarak veriliyor. Manyetik alan şiddetini ve gücün akış yönünü bulunuz.

Zamanda harmonik alanlar

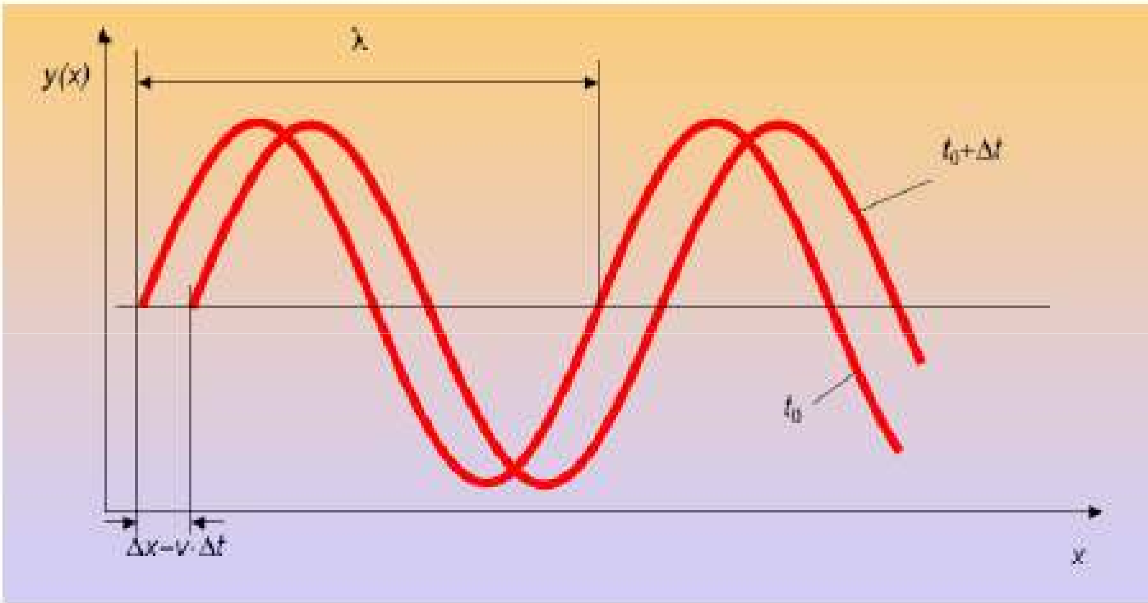
Zamana bağlı olarak kosinüsün veya sinüsün fonksiyonuna bağlı olarak değişen alanlar harmonik alanlardır.

Matematiksel olarak bir dalga, hem zamanın hem de konumun bir fonksiyonudur:



İlerleyen bir dalganın genel bağıntısı (1- boyut): $y = f(x \pm \upsilon t)$

t = 0 anında y = A sin 2π x/λ



y (x,t) = A sin 2π(x/λ-υt)

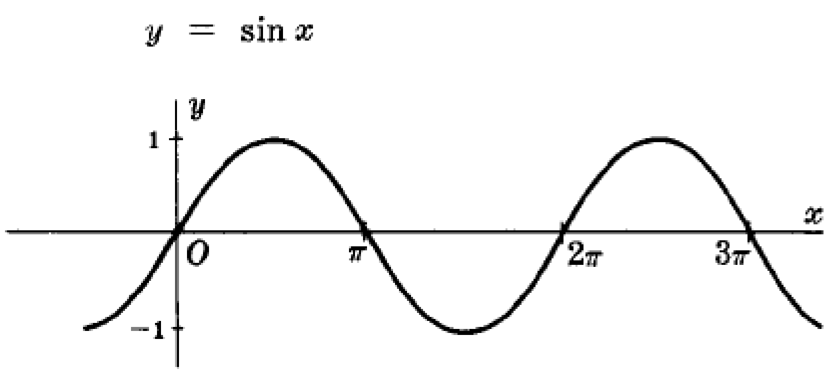
y (x,t) = A sin (kx-ωt)

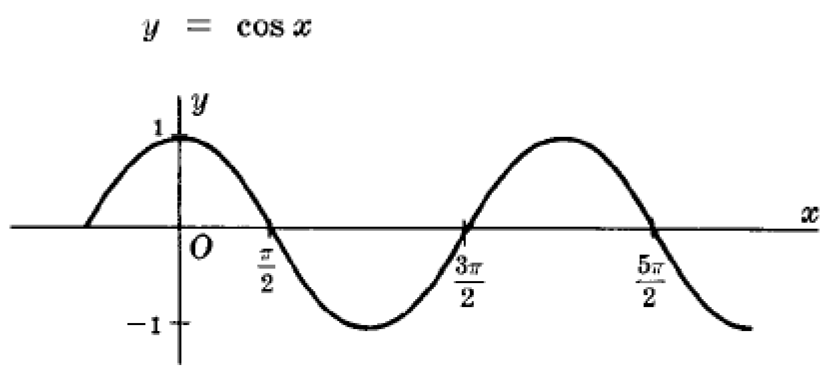
k = 2π / λ

dalga sayısı

Harmonik dalganın genel biçimi

$y = A \sin (kx \pm \omega t + \varphi)$ veya $y = A \cos (kx \pm \omega t + \varphi)$





Harmonik dalganın kompleks gösterimi

$y = A\exp(i(kx \pm \omega t))$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$ Euler eşitliği

$y = A[\cos(kx \pm \omega t) + i\sin(kx \pm \omega t)]$

$Re(y) = A\cos(kx \pm \omega t)$

$Im(y) = A\sin(kx \pm \omega t)$

FAZÖR GÖSTERİM

Fazörler, kompleks niceliklerin genlik ve faz bilgisi içeren kutupsal biçimleridir.

$$i(t) = I_0 . \cos(\omega t + \phi)$$

$$\Big\downarrow \text{Fazör gösterimi}$$

$$I_s = I_0 . e^{j\phi}$$

$$\boxed{I_s = I_0.e^{j\phi}}$$

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathrm{Re}(I_s e^{j\omega t}) = \mathrm{Re}(I_0.e^{j\phi}.e^{j\omega t}) = \mathrm{Re}(I_0.e^{j(\omega t+\phi)}) \\ &= \mathrm{Re}(I_0.\cos(\omega t+\phi) + jI_0 \sin(\omega t+\phi)) \\ &= I_0.\cos(\omega t+\phi) \end{aligned}$$

Örnek 6.7

Aşağıdaki akım fonksiyonlarının I_s fazör ifadelerini kosinüs referansı kullanarak yazınız.

a) $i(t) = -I_0.\cos(\omega t - 30^o)$

b) $i(t) = I_0.\sin(\omega t + 0.2\pi)$

ÖDEV Alıştırma 6.9

Örnek 6.8

Aşağıdaki fazörler için kosinüs referansını kullanarak anlık *v(t)* ifadelerini elde ediniz.

$$a)\, V_s = V_0.e^{j\pi/4}$$

$$b)\, V_s = 3 - j4$$

Elektrik alanın fazör gösterimi

$$\vec{\mathbf{E}}(x,y,z,t) = E_x(x,y,z,t)\vec{\mathbf{a}}_x + E_y(x,y,z,t)\vec{\mathbf{a}}_y + E_z(x,y,z,t)\vec{\mathbf{a}}_z$$

$$E_x(r,t) = \mathrm{Re}[E_{x0}(r)e^{j\alpha(r)}e^{j\omega t}]$$

$$E_y(r,t) = \mathrm{Re}[E_{y0}(r)e^{j\beta(r)}e^{j\omega t}]$$

$$E_z(r,t) = \mathrm{Re}[E_{z0}(r)e^{j\gamma(r)}e^{j\omega t}]$$

$$\tilde{E}_x(r) = E_{x0}(r)e^{j\alpha(r)}$$

$$\tilde{E}_y(r) = E_{y0}(r)e^{j\beta(r)}$$

$$\tilde{E}_z(r) = E_{z0}(r)e^{j\gamma(r)}$$

$$E_x(r,t) = \mathrm{Re}[\tilde{E}_x(r)e^{j\omega t}]$$

$$E_y(r,t) = \mathrm{Re}[\tilde{E}_y(r)e^{j\omega t}]$$

$$E_z(r,t) = \mathrm{Re}[\tilde{E}_z(r)e^{j\omega t}]$$

$$\vec{\mathbf{E}}(r,t) = \mathrm{Re}\{[\tilde{E}_x(r)\vec{\mathbf{a}}_x + \tilde{E}_y(r)\vec{\mathbf{a}}_y + \tilde{E}_z(r)\vec{\mathbf{a}}_z]e^{j\omega t}\}$$
$$= \mathrm{Re}[\tilde{\vec{\mathbf{E}}}(r)e^{j\omega t}]$$

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}(r,t)}{\partial t} = \mathrm{Re}[j\omega\tilde{\vec{\mathbf{E}}}(r)e^{j\omega t}]$$

Maxwell denklemlerinin fazör gösterimi

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \tilde{\vec{\mathbf{E}}} = -j\omega \tilde{\vec{\mathbf{B}}}$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \tilde{\vec{\mathbf{H}}} = \tilde{\vec{\mathbf{J}}} + j\omega \tilde{\vec{\mathbf{D}}}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho \qquad \vec{\nabla} \cdot \tilde{\vec{\mathbf{D}}} = \tilde{\rho}_v$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \tilde{\vec{\mathbf{B}}} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{J}} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \cdot \tilde{\vec{\mathbf{J}}} = -j\omega \tilde{\rho}_v$$

ÖRNEK: Kaynaktan bağımsız yalıtkan bir bölgede elektrik alan şiddeti

$\vec{\mathbf{E}} = C \sin \alpha x \cos(\omega t - kz)\vec{\mathbf{a}}_y$ V/m. olarak veriliyor. Fazör gösterimini

kullanarak manyetik alan şiddetini, alanların var olabilmeleri için gerekli koşulları, birim alan başına ortalama güç akışını bulunuz.

Dalga Denklemi

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$

Hız

$$v_y(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t)$$

İvme

$$a_y(x,t) = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(kx - \omega t)$$

$$= -\omega^2 y(x,t)$$

Ayrıca

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -k^2 A\cos(kx - \omega t) = -k^2 y(x,t)}$$

Dalga Denklemi

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = (k^2/\omega^2)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0}$$

1- boyutta dalga denklemi (1BDD) : $$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

3- boyutta dalga denklemi (3BDD): $$\nabla^2 u(\vec{r},t) = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 u(\vec{r},t)}{\partial t^2}$$

Maxwell denklemlerinin sağlanmasının gerekli şartı, bu denklemlerin her bileşeninin Dalga denklemini sağlaması gerekir.

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$