ELEKTROMANYETIK ALAN TEORISI

kaynaklar:
1) Electromagnetic Field Theory Fundamentals
Guru&Hiziroglu
2) A Student's Guide to Maxwell's Equations
Daniel Fleisch
3) Mühendislik Elektromanyetiğinin Temelleri
David K. Cheng, Türkçesi Adnan Köksal, Birsen Saka
Palme Yayıncılık

1- ELEKTRİK ALANLAR İÇİN GAUSS YASASI

Maxwell Denklemlerinde iki tip elektrik alanla karşılaşırız
• elektrik yükleri tarafından üretilen elektrostatik alan
•değişken manyetik alan tarafından üretilen indüklenmiş elektrik alan

Elektrik alanlar için Gauss Yasası elektrostatik alanlarla ilgilidir. Yük dağılımlarının oluşturduğu elektrostatik alanların uzaysal davranışları için elverişli bir yasadır.

Gauss Yasasının İntegral Formu:

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{d\mathbf{s}} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Elektrik Alan Şiddeti: $\vec{\mathbf{E}}$

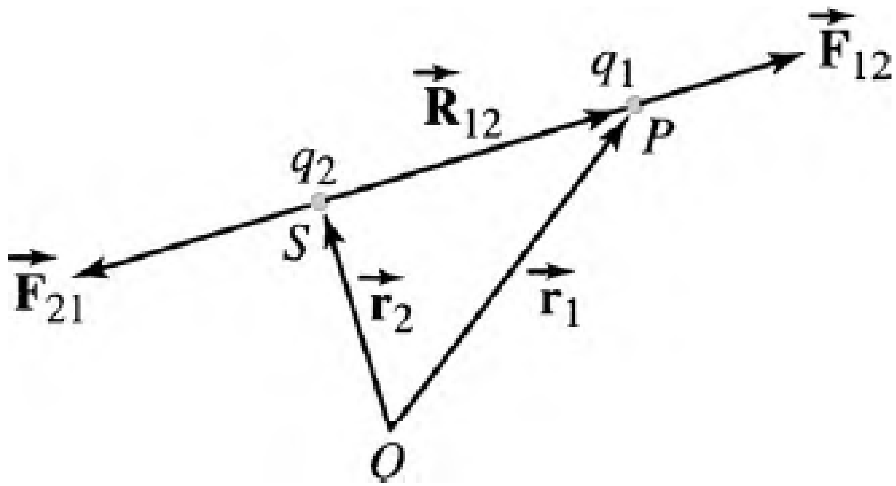
Elektrik alan şiddeti uzayda bir P noktasına yerleştirilen pozitif deneme yüküne etki eden kuvvet ölçülerek belirlenir. Yani birim yük başına kuvvettir. Birimi Newton/Coulomb (N/C) dir.

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}_e}{q_0}$$

Alan kavramına niçin ihtiyaç duyarız ?

Coulomb Yasası bir yükün diğer yüklere kuvvet etki ettireceğini söyler, yükler arası mesafe büyük olsa da.

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = K\frac{q_1 q_2}{R_{12}^2}\vec{\mathbf{a}}_{12}$$



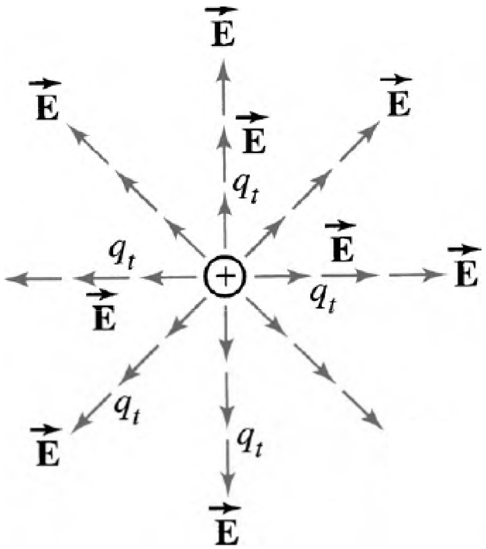
Yüklerin durgun olduğu durum için yükler arası mesafenin dikkate alınması tatmin edicidir.
Peki yüklerin biri diğerine doğru
hareket ediyorsa, bu durumda yüklerin hissedecekleri kuvvetin anlık olarak değişmesi gerekir.

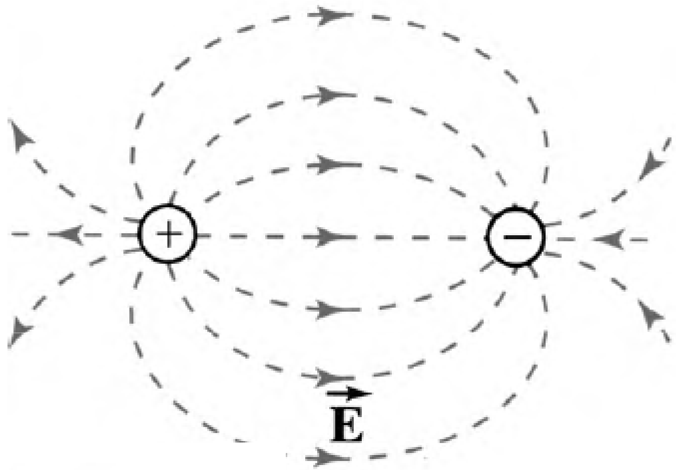
Yani, bir yükün hareketiyle diğer yüke uygulayacağı etkinin zaman alması beklenir, çünkü görelilik teorisi gereği,
herhangi bir sinyal ışık hızından daha hızlı iletilemez.

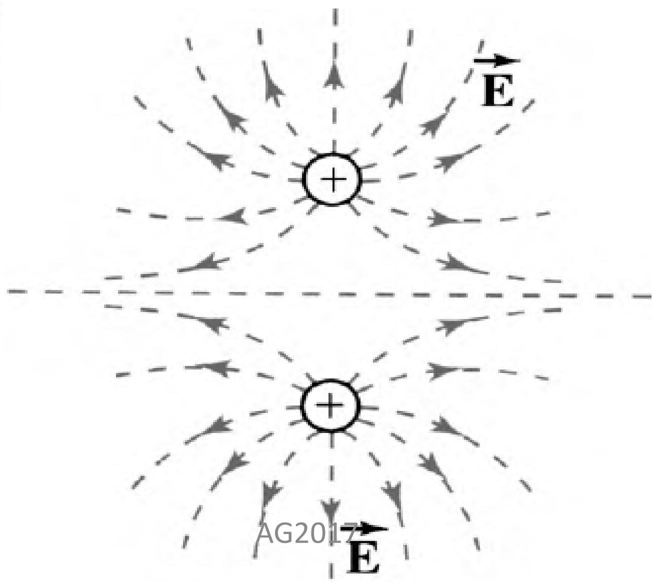
Yüklerin birbirlerine yaklaşması sırasında kuvvette bir artış söz konusu olacaktır ki, anlık bir artış olmayacağı için sistemin enerji ve momentumu geçici olarak dengesini kaybeder. Momentum ve enerjisini kendi kendine koruyamayan böyle sistemler için yeni bir özelliğe ihtiyaç duyulur ki buna ALAN denir.

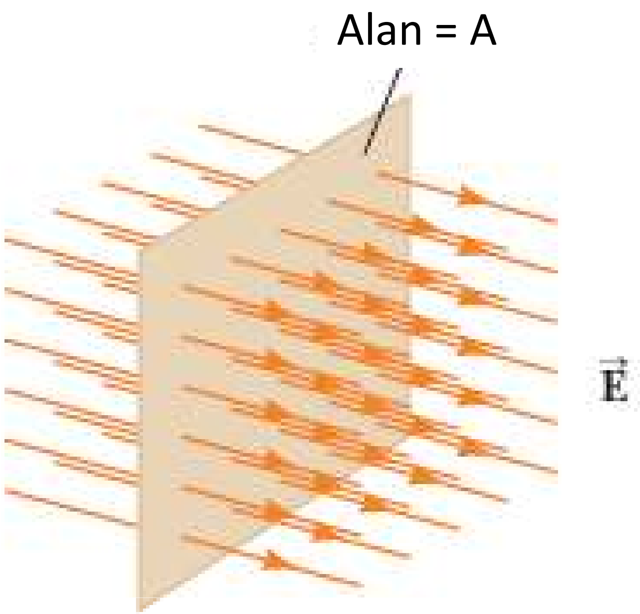
Elektrik Alan Çizgileri ve Elektrik Akısı:

Elektrik alan içinde bir deneme yükünün harketine izin
verelim ve bu yüke etki eden kuvvet belirli bir yol boyunca etki edecektir. Bu yol kuvvet çizgisi ya da akı çizgisi olarak adlandırılır. Elektrik alan çizgileri elektrik akısını göstermek için kullanılır.









Elektrik Akısı

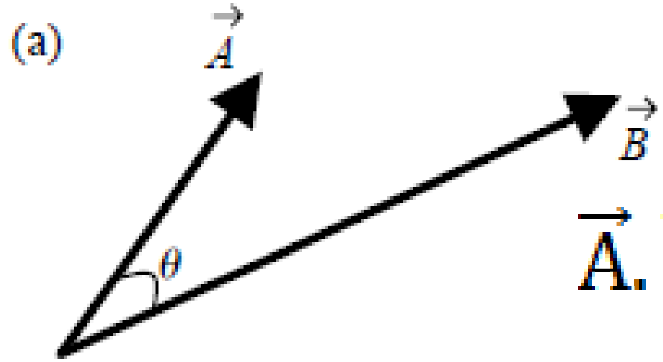
$$\phi = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

$\vec{A}$ A yüzeyini temsil eden vektör

Akıyı bulmak için yapılan işlem
elektrik alan şiddeti vektörüyle yüzey vektörünün skaler çarpımıdır. Söz konusu yüzeyden geçen elektrik alan çizgileri sayısının bir ölçüsüdür.

Skaler veya nokta çarpım

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$



$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Ödev : $\vec{\mathbf{A}} = 4\vec{\mathbf{a}}_x + 6\vec{\mathbf{a}}_y - 2\vec{\mathbf{a}}_z \quad \vec{\mathbf{B}} = -2\vec{\mathbf{a}}_x + 4\vec{\mathbf{a}}_y + 8\vec{\mathbf{a}}_z$

ise bu iki vektörün skaler çarpımını yapınız

Düzgün bir yüzeyden bahsedilmiyorsa söz konusu yüzey sonsuz küçük $\overrightarrow{dA}$ alanlarına parçalanarak hesaplanan akı toplanır. Bu nedenle akının bulunmasında kullanılan genel ifade:

$$\Phi = \oint_A \vec{E}.d\vec{A}$$

Bazı Yüklerin Elektrik Alanları

noktasal q yükü	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$	yükten r uzaklıkta
Q yüklü iletken küre	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$	küre merkezinden r uzaklıkta
Düzgün Q yüklü yalıtkan küre	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$	küre dışında merkezinden r uzaklıkta
	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qr}{r_0^3}\hat{r}$	küre içindemerkezinden r uzaklıkta
Sonsuz uzunluktaki çizgisel yük	$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\hat{r}$	
Düzgün yüklü sonsuz yüzey	$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$	

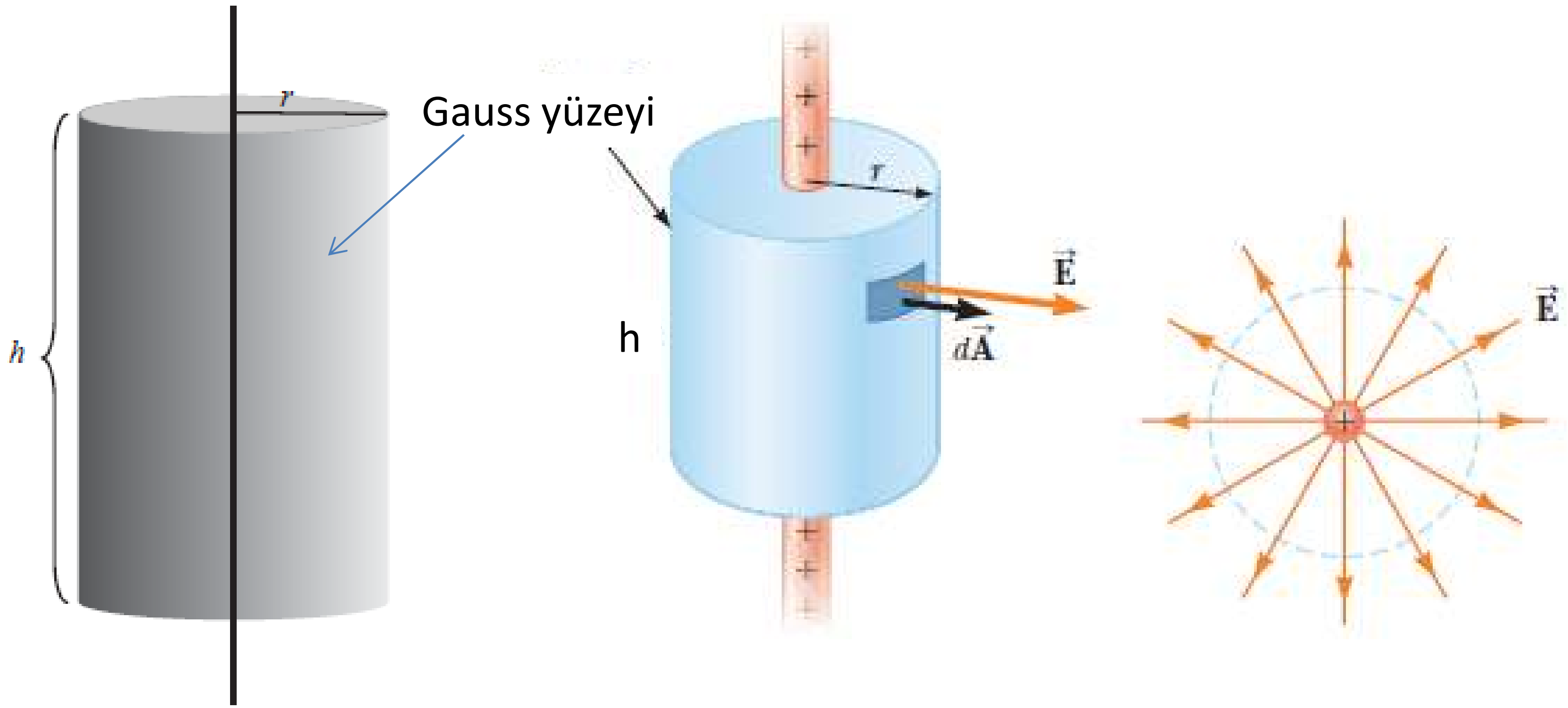
Gauss Yasasına geri dönersek

$$\Phi = \oint_A \vec{E}.d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Yasayı uygulamak için kapalı bir yüzeyden geçen elektrik akısının bulunması gerekir.

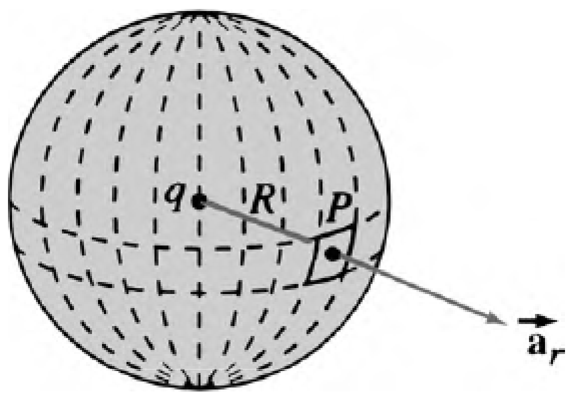
Bu yüzey, hesabı kolaylaştırmak için yük dağılımının geometrisine bağlı olarak küre veya silindir yüzeyi olarak tasarlanır ve yüzeye Gauss yüzeyi denir.

Örnek: Sonsuz uzunluktaki , λ çizgisel yük yoğunluğuna sahip sürekli yük dağılımından r uzaklıktaki elektrik alanı bulunuz.

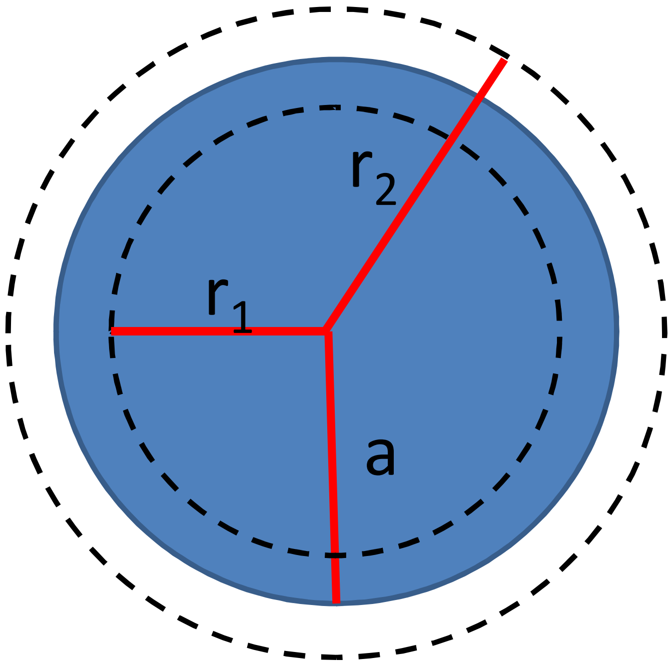


$$\Phi = \oint_A \vec{E}.d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Örnek: Noktasal bir q yükünün herhangi bir noktadaki elektrik alanını Gauss Yasasını kullanarak bulunuz.



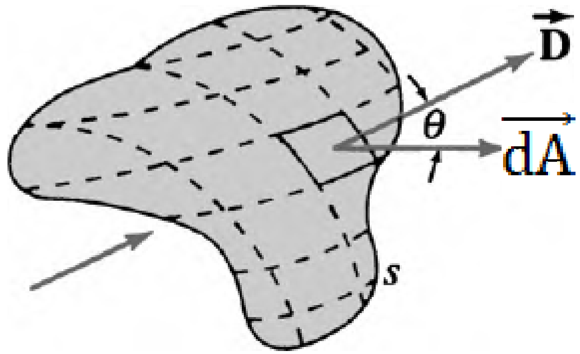
Örnek: Yarıçapı a, hacimsel yük yoğunluğu ρ olan, dolu yalıtkan bir kürenin içindeki ($r_1 < a$) ve dışındaki bölgede ($r_2 > a$) elektrik alan ifadelerini Gauss yasasını kullanarak bulunuz.



Elektrik Akı Yoğunluğu

$$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} \qquad \vec{\mathbf{D}} = \frac{q}{4\pi r^2}\vec{\mathbf{a}}_r \quad (\mathrm{C/m^2})$$

Elektrik Akısı



$$\Phi = \oint_A \vec{D}.d\vec{A}$$

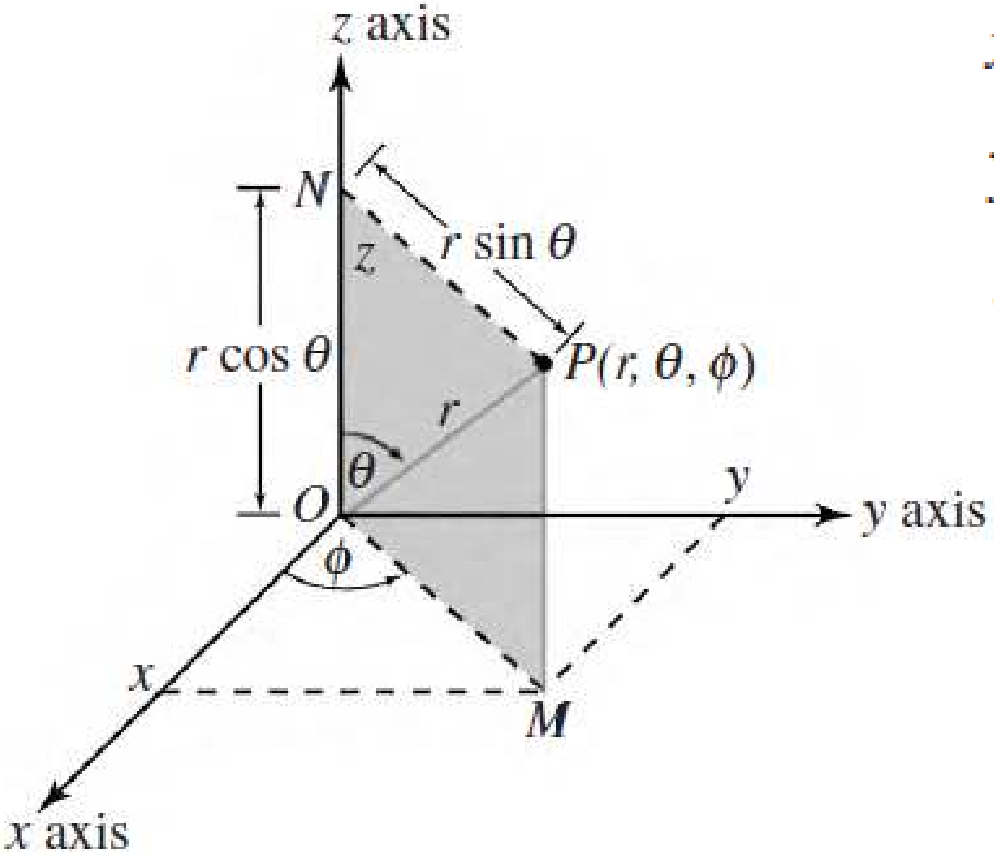
Örnek : Bir bölgede elektrik akı yoğunluğu

$\vec{\mathbf{D}} = 10\vec{\mathbf{a}}_r + 5\vec{\mathbf{a}}_\theta + 3\vec{\mathbf{a}}_\phi \ \mathrm{mC/m^2}$ olarak veriliyor.

$z \geq 0,$ bölgesinde $x^2 + y^2 + z^2 = 36.$ yüzeyinden geçen elektrik akısını bulunuz.

Soruda verilen elektrik akı yoğunluğu vektörü küresel koordinatlarda
verilmiştir. Önce küresel koordinatları inceleyelim.

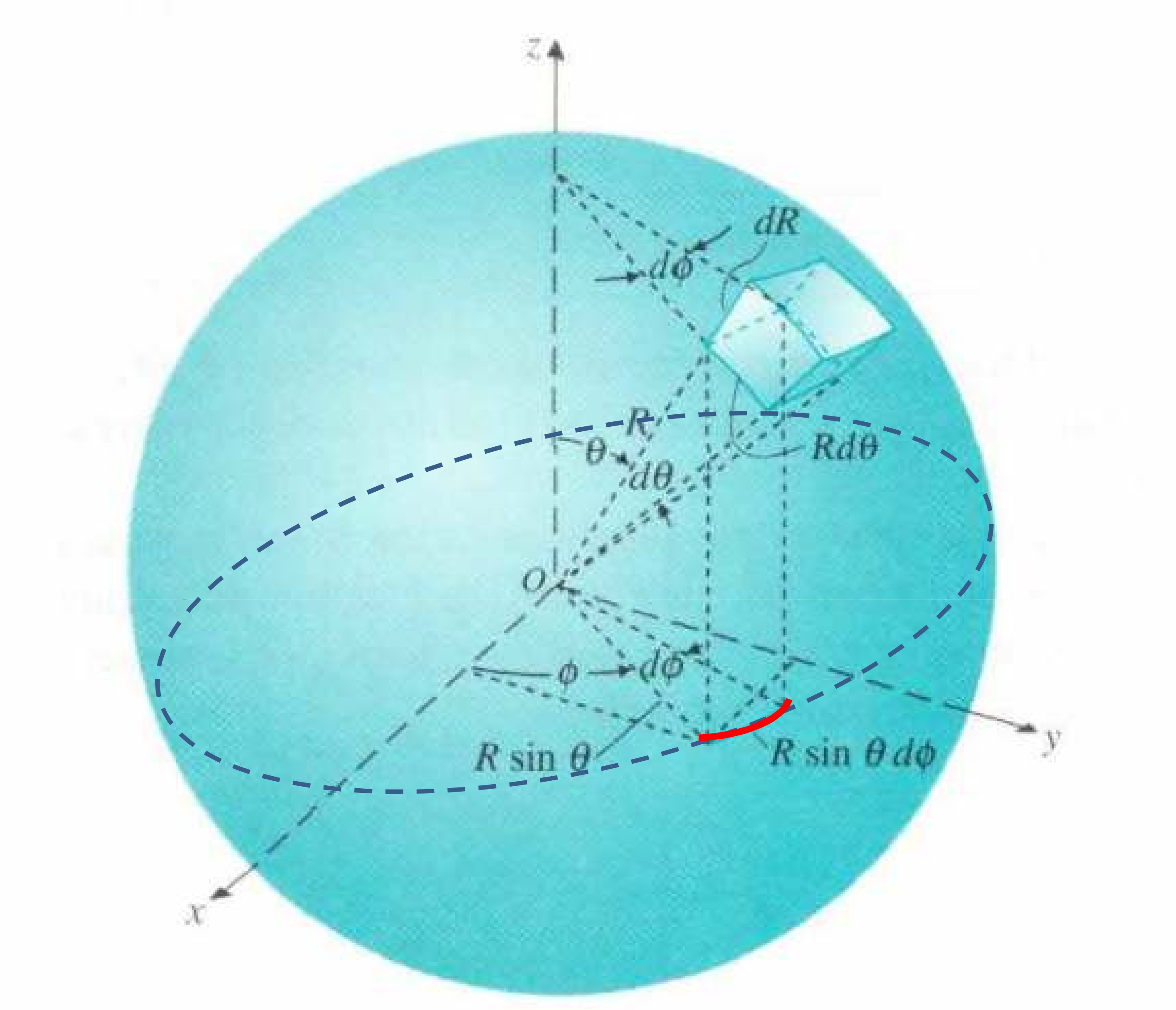
Küresel koordinat sistemi



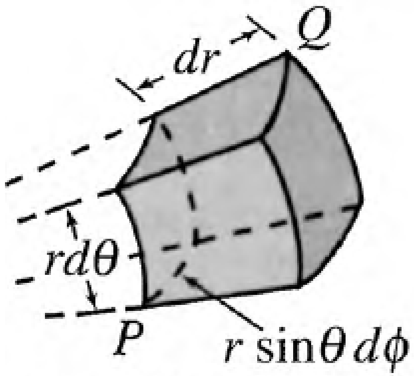
$$x = r \sin\theta \cos\phi$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi$$

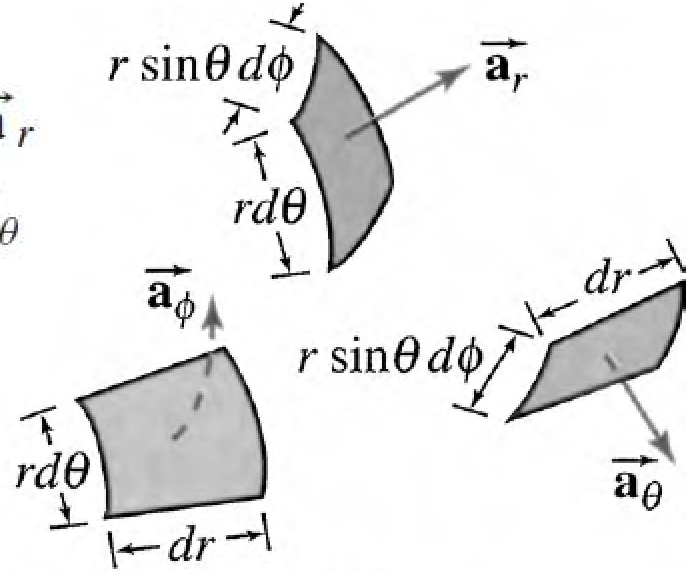
$$z = r \cos\theta$$



Küresel koordinatlarda bir diferansiyel hacim



$$\overrightarrow{ds}_r = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \vec{\mathbf{a}}_r$$
$$\overrightarrow{ds}_\theta = r \, dr \, \sin\theta \, d\phi \, \vec{\mathbf{a}}_\theta$$
$$\overrightarrow{ds}_\phi = r \, dr \, d\theta \, \vec{\mathbf{a}}_\phi$$



$$dv = r^2 \, dr \, \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

Örneğe uygularsak:

$$\mathrm{d}\vec{\mathrm{s}} = \mathrm{d}\vec{\mathrm{A}} = 36 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \vec{\mathbf{a}}_r$$

$$\Phi = \oint_A \vec{D} . d\vec{A} = 360 \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 720\pi \text{ mC}$$

Örnek : Yarıçapları 2 ve 5 cm olan iki küre arasındaki bölgede bulunan elektron bulutunun yük yoğunluğu

$$\frac{-3 \times 10^{-8}}{R^4} \cos^2 \phi \qquad (\mathrm{C/m^3})$$

olarak veriliyor. Bölgedeki toplam yükü bulunuz.

ÖDEV : Küresel koordinatlarda diferansiyel yüzey ve hacim elemanlarını kullanıp integral alarak r yarıçaplı bir kürenin yüzey alanı ve hacim formüllerini çıkarınız.

Gauss Yasasının Diferansiyel Formu:
Gauss yasasinin kapalı bir yüzey üzeriden elektrik akısının hesaplanması şeklinde olan integral formundan bahsetmiştik.

$$\Phi = \oint_A \vec{E}.d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Gauss Yasasının diferansiyel formu,

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

biçimindedir. Eşitliğin sol tarafındaki işlem diverjans işlemi olarak adlandırılır.

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

hacimce yük yoğunluğu

del veya nabla operatörü

elektrik alan şiddeti

boş uzayın elektriksel geçirgenliği

Diferansiyel form türevle ifade edilen formdur. Diverjans işlemi de türev içerir. del operatörü kartezyen koordinatlarda aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\vec{\nabla} \equiv \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Gauss yasısında olduğu gibi del operatörünün bir vektörle skaler ya da nokta çarpımı diverjans işlemidir.
Peki bu işlem nasıl yapılır?

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right).(\hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z)$$

Skaler çarpımın tanımı gereği (bkz. sayfa 8)

$$\hat{\imath}.\hat{\imath} = \hat{\jmath}.\hat{\jmath} = \hat{k}\,.\hat{k} = 1$$

dir. Yukarıdaki işlem böylece

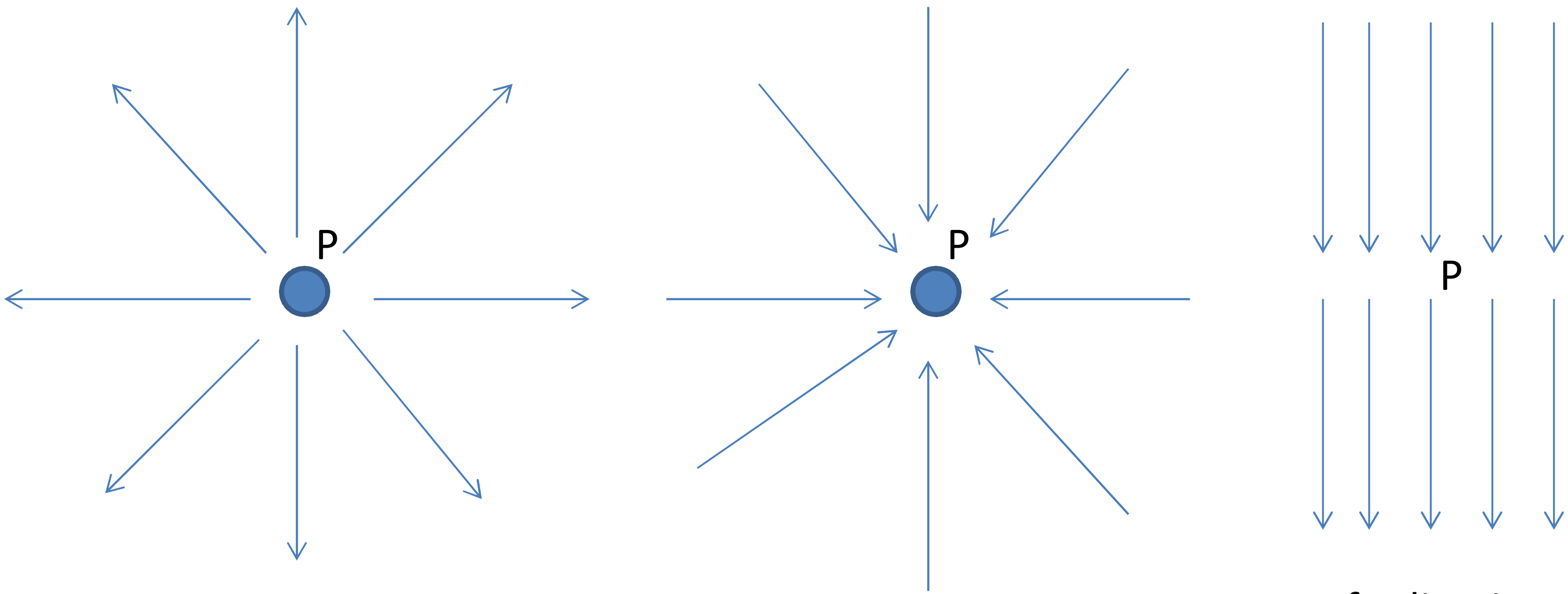
$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$ haline dönüşür.

Örnek : Uzaydaki herhangi bir P noktasının konum vektörünün diverjansını bulunuz.

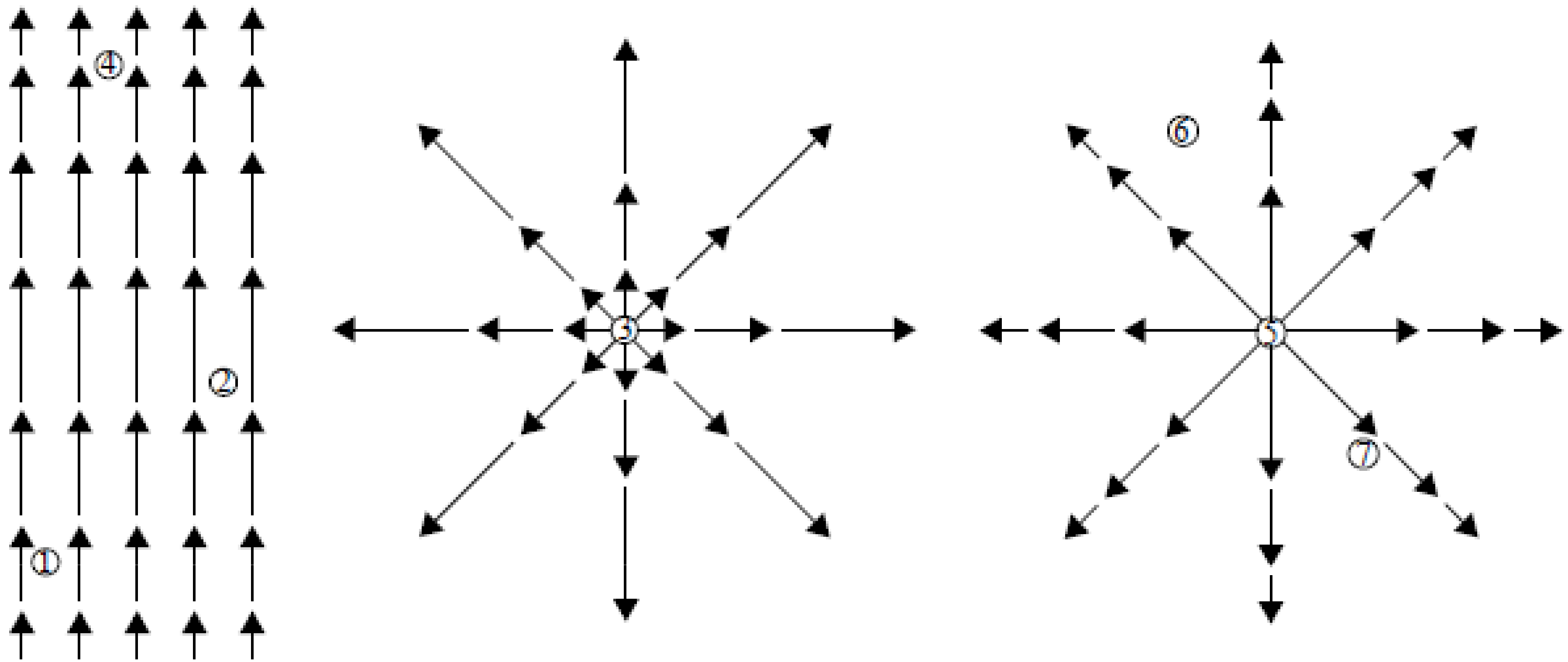
Örnek: $\vec{D} = 3x^2\hat{\imath} + (3y+z)\hat{\jmath} + (3z-x)\hat{k}$ vektörünün diverjansını bulunuz.

Diverjans işleminin anlamı nedir?

Diverjans da akı olayında olduğu gibi, bir elektrik yükünden vektör alanının akış yönü ile ilgilidir. Ancak aralalarındaki fark, akı kavramı bir yüzey üzerinden tanımlanırken, diverjans ayrı ayrı noktaları dikkate alır.

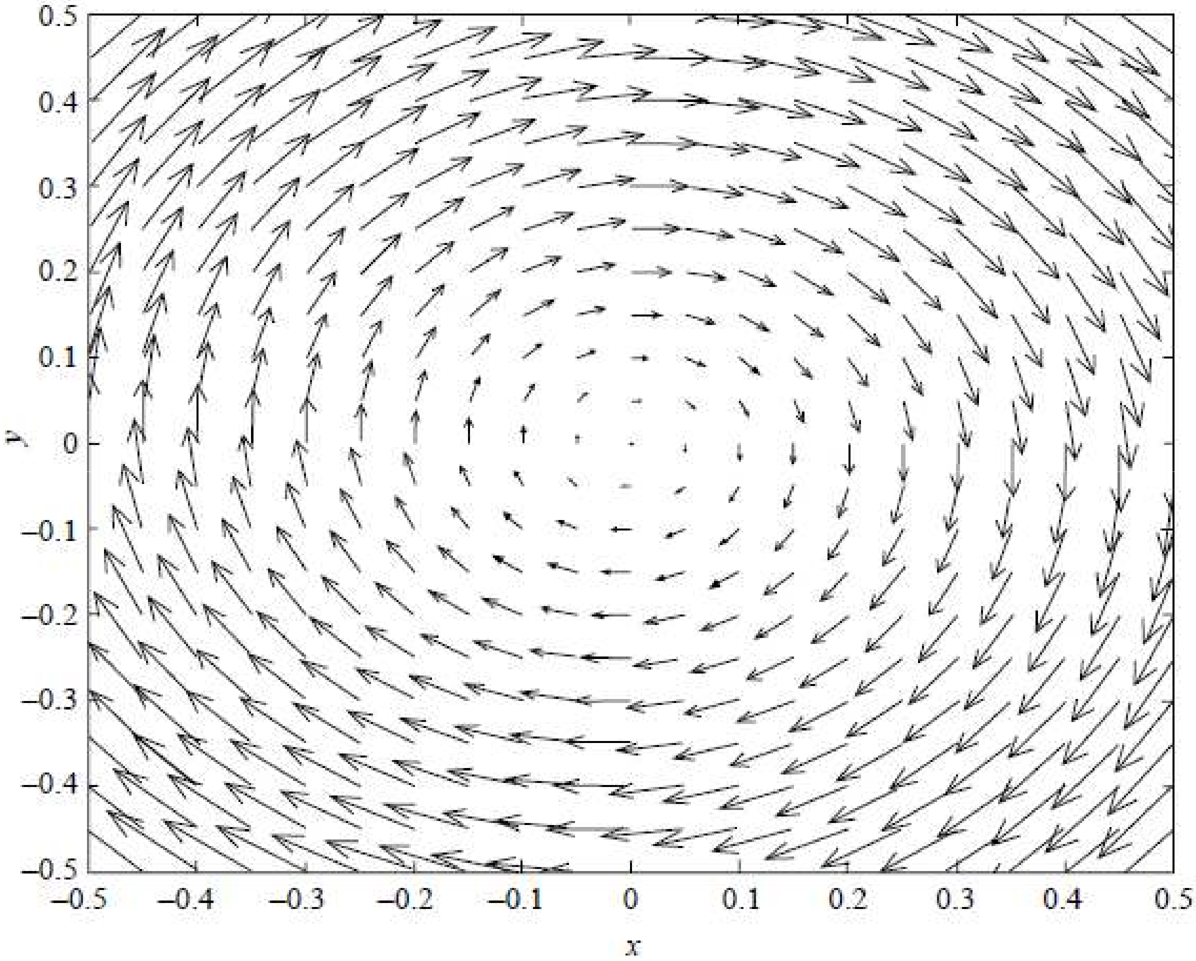


pozitif diverjans "kaynak" | negatif diverjans "çukur" | sıfır diverjans



1,2 , 3 ve 5 numaralı noktalar pozitif diverjansa, 4 numara ise negatif diverjansa karşılık gelir. Peki 6 ve 7 numaralı noktalar?

ÖDEV: $\vec{A} = \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)\hat{i} - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\hat{j}$ vektör alanının diverjansını bulunuz.



Örnek: Elektrik alan vektörü bir boyutta

x= 0 dan x=3 m aralığı için $\vec{E} = ax^2\hat{i}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$

x > 3 m icin $\vec{E} = b\hat{i}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$

olarak veriliyor. x = 2 m ve x = 5 m konumlarındaki yük yoğunluklarını bulunuz

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

x = 2 m deki yük yoğunluğu için
x= 0 dan x=3 m aralığındaki elektrik alan vektörü kullanılmalı

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right).(ax^2\hat{\imath})$$

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\partial(ax^2)}{\partial x} = 2xa$$

$$\rho = 2xa\varepsilon_0$$

x = 5 m deki yük yoğunluğu için
x> 3 m aralığındaki elektrik alan vektörü kullanılmalı

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).(b\hat{\imath}) = 0$$

$$\rho = 0$$

ÖDEV: $\vec{\mathbf{F}} = -xy\vec{\mathbf{a}}_x + 3x^2yz\vec{\mathbf{a}}_y + z^3x\vec{\mathbf{a}}_z$

vektörünün P (1, -1, 2) noktasındaki diverjansını bulunuz.