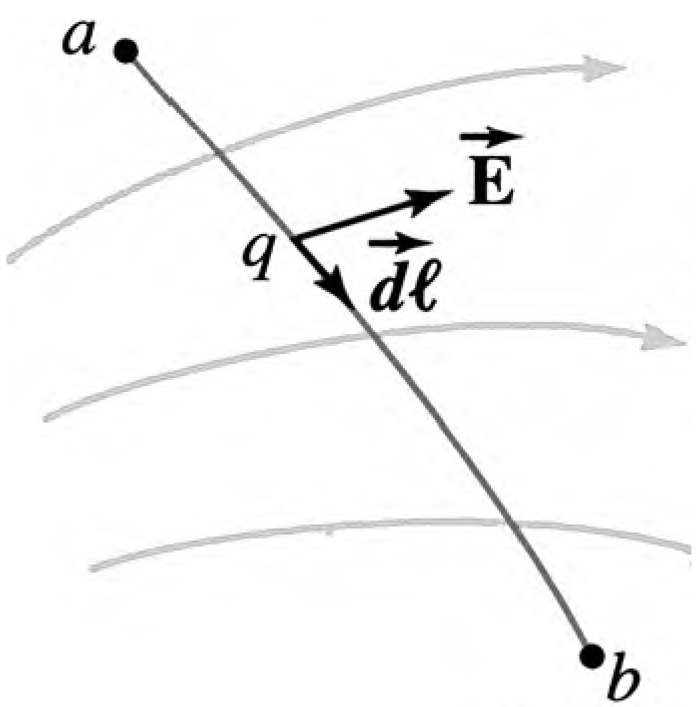
Elektriksel Potansiyel

Karmaşık hesaplamalarda işimizi kolaylaştırmak için elektrik alan şiddetinden başka burada skaler bir alan tanımlıyoruz: elektriksel potansiyel.

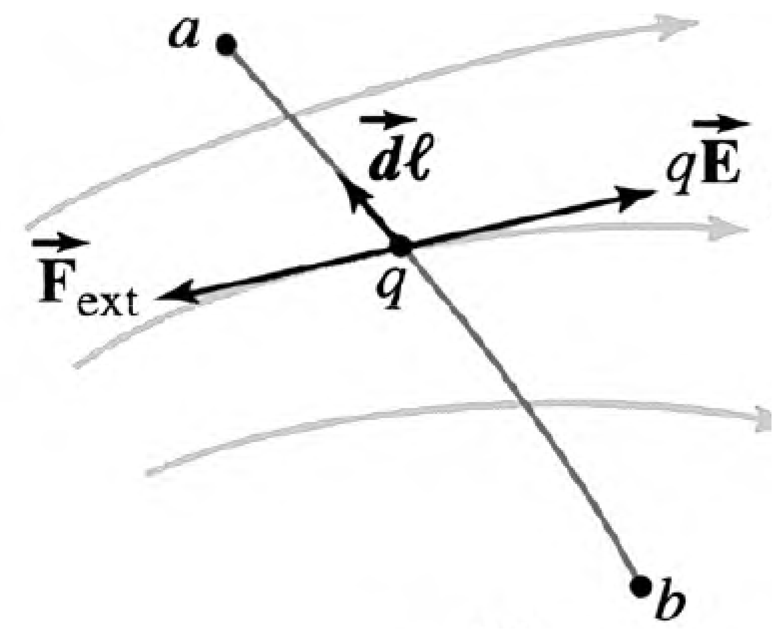


şekildeki gibi elektrik alan içindeki q yükünün a dan b ye hareketini düşünelim.

Elektrik alan tarafından yapılan iş:

$$dW_e = \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = q\vec{E} \cdot \vec{d\ell}$$

Peki yüklü parçacık dış bir kuvvet etkisiyle elektrik alana zıt yönde hareket ettirilseydi

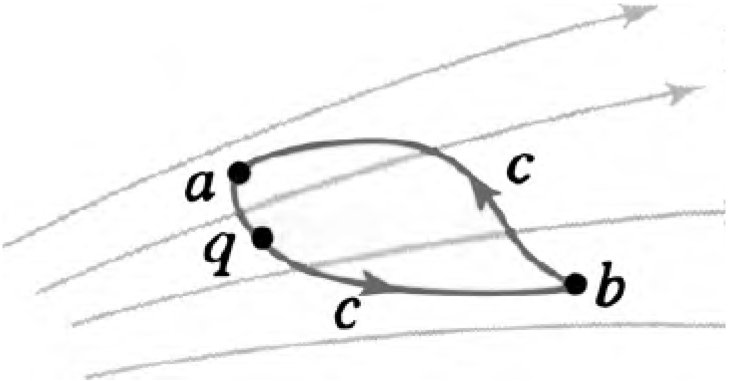


dış kuvvetin yapatığı iş

$$dW = -\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

toplam iş

$$W_{ab} = -q \int_b^a \vec{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$



Şekildeki gibi kapalı bir yol boyunca yapılan iş hesaplanmak istenirse:

$$\oint_c \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{d\ell} = 0$$

Bu ifade elektrik alanın korunumlu olduğunu yani yoldan bağımsız olduğunu gösterir ve

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = 0$$ şeklinde de ifade edilir.

İşte bu şekilde rotasyoneli sıfır olan vektör alanlar bir skaler alanın gradyentiyle gösterilebilir.

$$\vec{\mathbf{E}} = -\nabla V$$

$\vec{\mathbf{E}} = -\nabla V$ bu ifadeyi iş için yazdığımız ifadede kullanırsak

$$W_{ab} = -q\int_b^a \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{d\ell} = q\int_b^a \nabla V \cdot \vec{d\ell}$$

$$W_{ab} = -q\int_b^a \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{d\ell} = q\int_{V_b}^{V_a} dV = q[V_a - V_b] = qV_{ab}$$

V_{ab} a ve b noktaları arasındaki potansiyel farkı gösterir.

Potansiyel fark, birim yük başına potansiyel enerjideki değişimdir

$$V_{ab} = \lim_{q \to 0} \frac{W_{ab}}{q} = -\int_b^a \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{d\ell}$$

Örnek: İki nokta arasındaki, orjindeki q noktasal yükten kayanaklanan potansiyel farkı bulunuz.

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{\mathbf{a}}_r$$

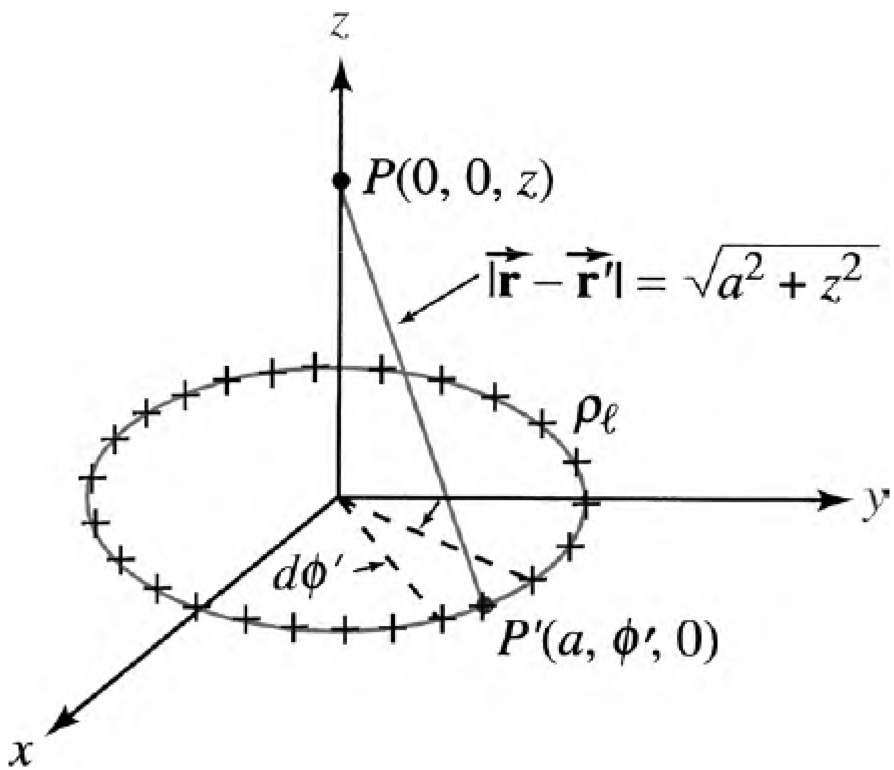
$$V_{ab} = -\int_{r_2}^{r_1} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

$r_2 \to \infty$ için yani sonsuzdaki bir noktaya göre q yükünden R uzaklıktaki noktanın potansiyeli için

$$V_a = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R}$$

buluruz. Bu eşitlik aynı zamanda bize sabit yarıçaplı bir yüzeydeki potansiyelin değişmeyeceğini söyler, potansiyelin heryerde aynı olduğu böyle yüzeylere eşpotansiyel yüzey denir.

Örnek: a yarıçaplı halka şeklindeki düzgün yük dağılımının, halka ekseni üzerinde herhangi bir noktadaki potansiyelini ve elektrik alan şiddetini bulunuz.



çizgisel yük dağılımı için

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_c \frac{\rho_\ell(\mathbf{r}')\,d\ell'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$ kullanılır

$P(0, 0, z)$ noktasındaki potansiyel

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} \frac{\rho_\ell a\,d\phi'}{[a^2+z^2]^{1/2}}$$

$$= \frac{\rho_\ell a}{2\epsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}$$ bulunur

P noktasındaki elektrik alan şiddeti için ise elektrik alan şiddeti ve potansiyel arasındaki ilişkiden

$$\vec{\mathbf{E}} = -\nabla V = -\frac{\partial V(z)}{\partial z}\vec{\mathbf{a}}_z = \frac{\rho_\ell a}{2\epsilon_0}\left[\frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}}\right]\vec{\mathbf{a}}_z$$

bulunur. Burada elektrik alan şiddetini bulmak için potansiyelin gradyenti alınmıştır.

Skaler bir foknsiyonun gradyenti kartezyen koordinat sisteminde

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\mathbf{a}}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\mathbf{a}}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{\mathbf{a}}_z$$

Skaler bir foknsiyonun gradyenti silindrik koordinat sisteminde

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{\mathbf{a}}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{\mathbf{a}}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{\mathbf{a}}_z$$

Örnek: P(2,1,0) noktasında $f(x, y, z) = 6x^2y^3 + e^z$ skaler alanının gradyentini bulunuz.

$$\nabla f = \frac{\partial}{\partial x}[6x^2y^3 + e^z]\vec{\mathbf{a}}_x + \frac{\partial}{\partial y}[6x^2y^3 + e^z]\vec{\mathbf{a}}_y + \frac{\partial}{\partial z}[6x^2y^3 + e^z]\vec{\mathbf{a}}_z = 12xy^3\vec{\mathbf{a}}_x + 18x^2y^2\vec{\mathbf{a}}_y + e^z\vec{\mathbf{a}}_z$$

P noktası için

$$\nabla f = 24\vec{\mathbf{a}}_x + 72\vec{\mathbf{a}}_y + \vec{\mathbf{a}}_z$$

Örnek : Uzayın belli bir bölgesindeki elektrik potansiyeli, $V(x,y,z)=5x-3x^2y+2yz^2$ (V) ile veriliyor. Bölgedeki elektrik alan bileşenlerini bulunuz. $(1,0,-2)$ noktasındaki elektrik alan şiddetini hesaplayınız.

$$E_x=-\frac{d}{dx}(5x-3x^2y+2yz^2)=-5+6xy$$

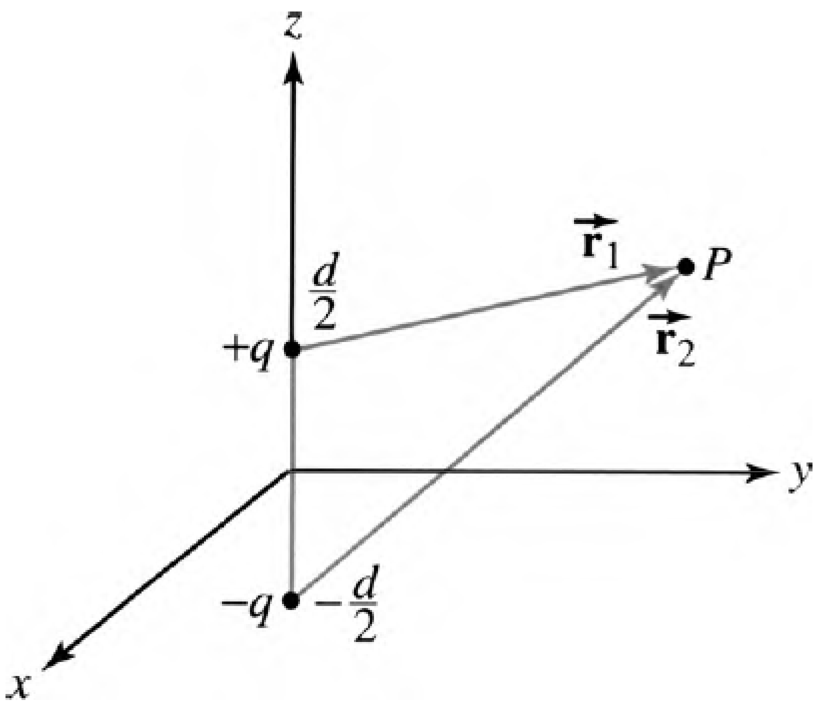
$$E_y=-\frac{d}{dy}(5x-3x^2y+2yz^2)=3x^2-2z^2$$

$$E_z=-\frac{d}{dz}(5x-3x^2y+2yz^2)=-4yz$$

$$(1,\ 0,\ -2)\rightarrow E_x=-5\ \text{V/m}\ ;\ E_y=3-2*4=-5\ \text{V/m}\ ;\ E_z=0$$

$$E=\sqrt{(-5)^2+(-5)^2+(0)^2}=25\sqrt{2}\ \text{V/m}$$

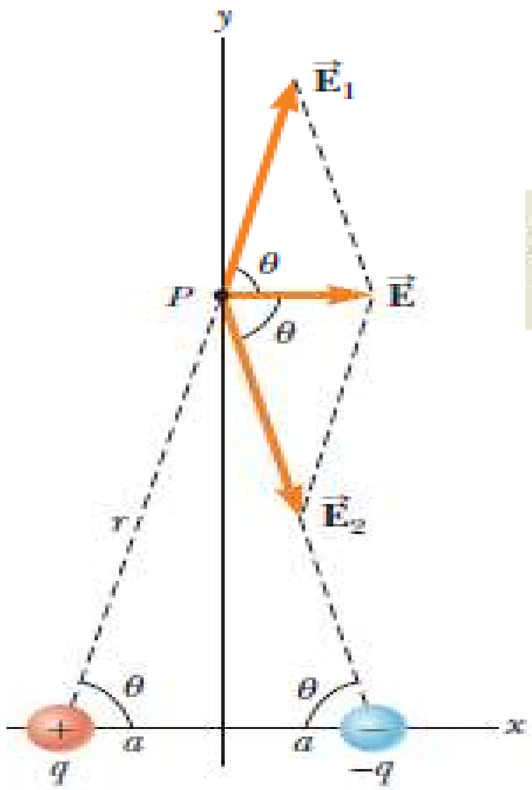
Elektrik Dipol



Şekildeki gibi birbirine çok yakın, iki eşit fakat zıt yük çiftine elektrik dipol denir.

Elektrik dipolün elektrik alanı

Şekildeki gibi aralaların 2a gibi bir mesafe olan eşit büyüklükte bir pozitif ve bir negatif yükten oluşan sisteme elektrik dipol denir.



Elektrik dipolün P noktasındaki elektrik alanı bulunmak istenirse:

$$E_x = k_e \frac{q}{a^2+y^2}\cos\theta + k_e \frac{q}{a^2+y^2}\cos\theta = 2k_e \frac{q}{a^2+y^2}\cos\theta$$

$$E_y = k_e \frac{q}{a^2+y^2}\sin\theta - k_e \frac{q}{a^2+y^2}\sin\theta = 0$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{(a^2+y^2)^{1/2}}$$

$$E_x = 2k_e \frac{q}{a^2+y^2}\frac{a}{(a^2+y^2)^{1/2}} = k_e \frac{2aq}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

Bulmuş olduğumuz

$$E_x = 2k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \frac{a}{(a^2 + y^2)^{1/2}} = k_e \frac{2aq}{(a^2 + y^2)^{3/2}}$$

sonucu y >> a için

$$E \approx k_e \frac{2aq}{y^3}$$ olur

Bu ifadedeki 2aq çarpımına elektrik dipol momenti denir ve p harfiyle gösterilir.

ÖDEV 2 : Elektrik Dipolün önemi nedir?