Manyetik Alan Şiddeti ve Ampere Devre Yasası

Elektrik alanlar için elektrik akı yoğunluğunu, elektrik alan şiddeti cinsinden tanımlamıştık.

$$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon \vec{\mathbf{E}}$$

Buna benzer şekilde manyetik alan şiddetiyle manyetik akı yoğunluğu arasındaki ilişki boş uzay için

$$\vec{\mathbf{H}} = \frac{\vec{\mathbf{B}}}{\mu_0}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{H}}$$ şeklindedir.

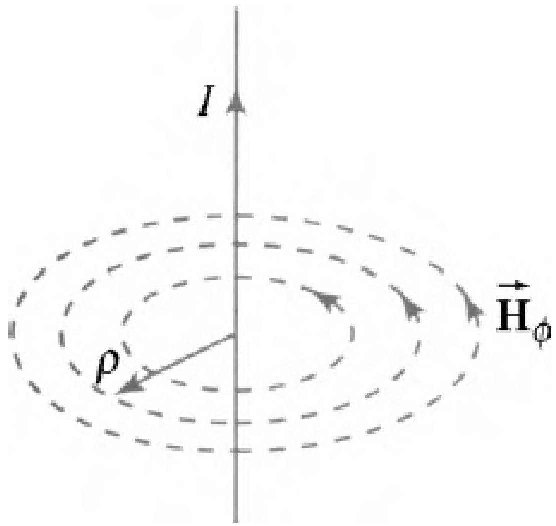
Ampere Devre Yasası ya da Ampere Yasası,

kapalı bir yol boyunca manyetik alan şiddetinin integralinin bu yolun sınırladığı bölgedeki akımı verdiğini söyler.

$$\oint_c \vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{d\ell} = I$$ Ampere Yasasının integral biçimi

Buradaki I akımı bir iletken içindeki akım olabileceği gibi,
bir vakum tüpündeki
elektron ışınının akımı da olabilir.

Örnek: I akımı taşıyan, z eksenine yerleştirilmiş çok uzun,ince ve düzgün bir telin uzayda herhangi bir noktada oluşturacağı manyetik alan şiddetini Ampere Yasasını kullanarak bulunuz.



$$\oint_c \vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{d\ell} = \int_0^{2\pi} H_\phi \rho \, d\phi = 2\pi \rho H_\phi$$

$$\oint_c \vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{d\ell} = I$$

$$\vec{\mathbf{H}} = \frac{I}{2\pi\rho} \vec{\mathbf{a}}_\phi$$

Bu sonuç daha önce Biot-Savart yasasıyla bulunan sonuçla aynıdır.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

Elektrik ve Manyetik Alandaki Enerji

Enerji yoğunlukları

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{\mathbf{D}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$$

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{H}}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_v \vec{\mathbf{D}} \cdot \vec{\mathbf{E}}\, dv$$

$$W_m = \int_v w_m\, dv$$

Örnek: 10 cm yaricapli metalik kurenin yuzey yuk yogunlugu 10 nC/m^2 dir. Sistemde depolanan elektrik enerjisini bulunuz.

$$W_e = \frac{1}{2}\int_v \vec{\mathbf{D}}\cdot\vec{\mathbf{E}}\,dv$$

$$\oint_s \vec{\mathbf{D}}\cdot\overrightarrow{d\mathbf{s}} = Q_t \qquad \vec{\mathbf{D}} = \frac{Q_t}{4\pi r^2} = \frac{0.1\times 10^{-9}}{r^2}\vec{\mathbf{a}}_r\,\mathrm{C/m^2}$$

$$w = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{D}}\cdot\vec{\mathbf{E}} = \frac{(0.1)^2\times 10^{-18}}{2\epsilon_0 r^4}$$

Küresel koordinatlarda hacim elemanı $dv = r^2\,dr\ \sin\theta\,d\theta\,d\phi$

$$W = \int_{0.1}^{\infty}\frac{(0.1)^2\times 10^{-18}}{2\epsilon_0 r^4}r^2\,dr\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\phi$$

$$= 71.06\,\mathrm{nJ}$$

Önceki Örnek için 2.yol

10 cm yaricapli metalik küre

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i \qquad W = \frac{1}{2}\int_v \rho_v V \, dv$$

$$V = \int_s \frac{\rho_s \, ds}{4\pi\epsilon_0 R} = 9 \times 10^9 \times 10 \times 10^{-9} \times 0.1 \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= 113.1 \text{ V}$$

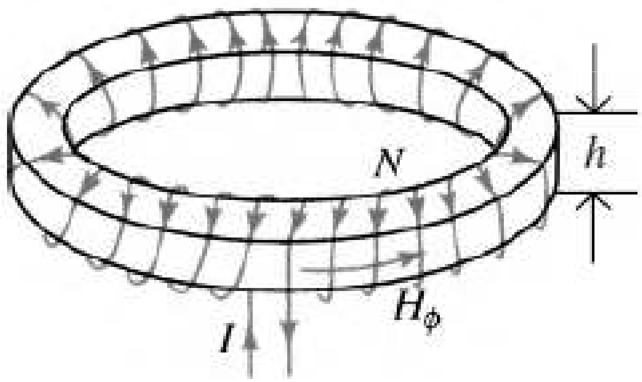
$$W = \frac{1}{2}\int_s \rho_s V \, ds = \frac{1}{2} Q_t V$$

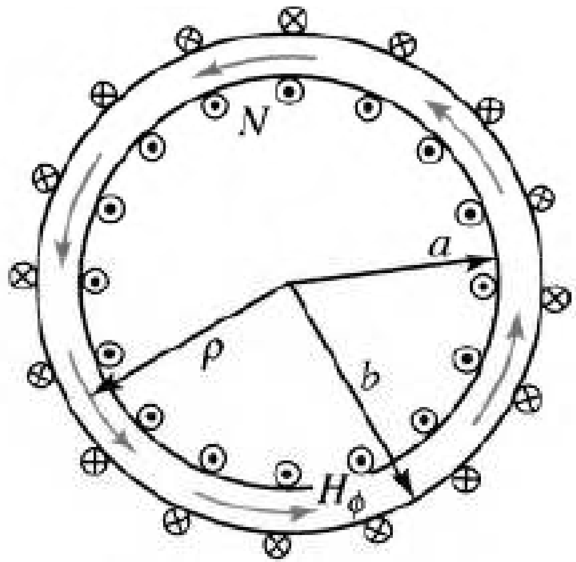
$$Q_t = 4\pi R^2 \rho_s = 4\pi (0.1)^2 \, 10 \times 10^{-9} = 1.257 \text{ nC}$$

$$W = 0.5 \times 1.257 \times 10^{-9} \times 113.1 = 71.08 \times 10^{-9} \text{ joules (J)}$$

Örnek: Toroid sarimin manyatik alaninda depolanan enerjiyi bulunuz.

oncelikle Toroid sarimin icindeki manyetik alana bakalim





Ampere Yasasi $\oint_c \vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{d\ell} = I$

$$\vec{\mathbf{H}} = \frac{I}{2\pi\rho}\vec{\mathbf{a}}_\phi$$

Sonsuz uzunlukta I akimi tasiyan telin etrafinda olusturdugu manyetik alani

Toroidin icindeki bolgede manyetik alan da

$$\vec{\mathbf{H}} = \frac{NI}{2\pi\rho}\vec{\mathbf{a}}_\phi$$

manyetik alandaki enerji

$$w_m = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 = \frac{1}{8}\mu_0\left[\frac{NI}{\pi\rho}\right]^2$$

$$W_m = \int_v w_m\,dv$$

Silindirik koordinatlar

İçin hacim elemanı

$$dv = \rho\,d\rho\,d\phi\,dz$$

$$W_m = \frac{N^2I^2}{8\pi^2}\mu_0\int_a^b \frac{1}{\rho}\,d\rho\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^h dz$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}N^2I^2h\ln[b/a]$$

STATİK ALANLARI ÖZETLERSEK

• Statik elektrik alanlar yükler tarafından oluşturulur.
• Statik manyetik alanlar hareketli yükler veya sürekli elektrik akımlarınca oluşturulur
• Statik elektrik alanlar korunumludur
• Statik manyetik alanlar süreklidir
• Statik elektrik alanlar ve statik manyetik alanlar biribirlerinden Bağımsız olarak var olabilirler.

Matematiksel karşılığı manyetik alanın diverjansının sıfır olmasıdır. $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

Matematiksel karşılığı elektrik alanın rotasyonelinin sıfır olmasıdır. $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

Bir vektörün rotasyoneli nasıl bulunur?

$$\vec{\mathbf{F}} = F_x\vec{\mathbf{a}}_x + F_y\vec{\mathbf{a}}_y + F_z\vec{\mathbf{a}}_z$$

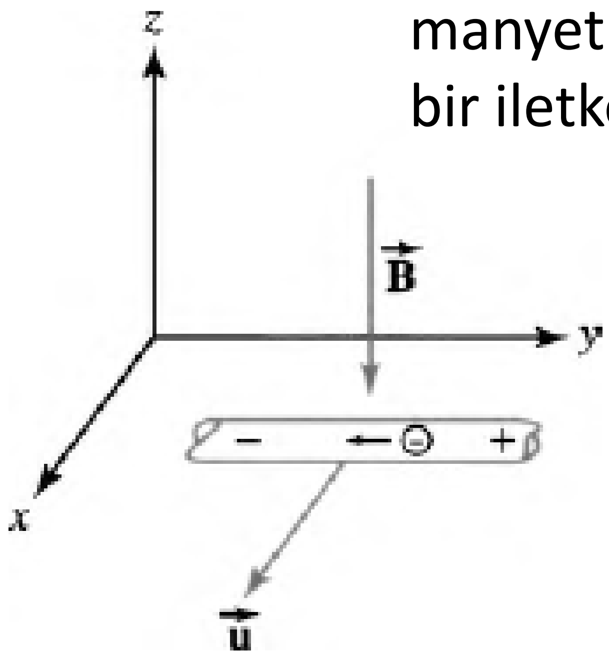
$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{a}}_x & \vec{\mathbf{a}}_y & \vec{\mathbf{a}}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Kartezyen koordinatlarda rotasyonelin bulunması

ÖRNEK: $\vec{\mathbf{F}} = (2z+5)\vec{\mathbf{a}}_x + (3x-2)\vec{\mathbf{a}}_y + (4x-1)\vec{\mathbf{a}}_z$ vektörünün rotasyonelini bulunuz.

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{a}}_x & \vec{\mathbf{a}}_y & \vec{\mathbf{a}}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2z+5 & 3x-2 & 4x-1 \end{vmatrix} = -2\vec{\mathbf{a}}_y + 3\vec{\mathbf{a}}_z$$

Manyetik Alan Tarafından Oluşturulan Elektrik Alan



manyetik alanda hareket ettirilen
bir iletken düşünelim

Bu iletken içindeki herbir elektrona
etki eden manyetik kuvvet

$$\vec{\mathbf{F}} = q_e \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}}$$
$$= q_e\, u B \vec{\mathbf{a}}_y$$

Bu hareket esnasında teli ortadan ikiye bölersek ne gözlemleriz ?

Parçalardan birinin negatif diğerinin pozitif yüklü hale geldiğini görürüz

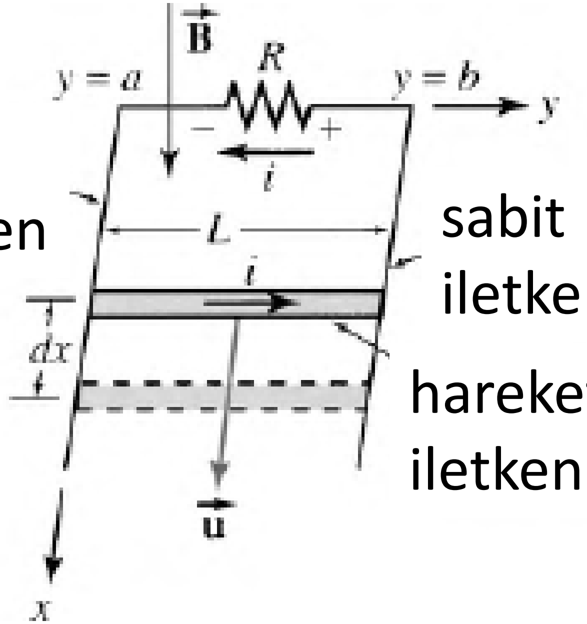
O halde manyetik alanın oluşturacağı elektrik alan için

$$\vec{\mathbf{F}} = q_e \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}} = uB\vec{\mathbf{a}}_y$$

yazılır ve buna indüklenmiş elektrik alan denir.

Manyetik alanda hareket eden iletkeni bir devreye bağlarsak oluşan akıma indüklenmiş akım denir.



sabit iletken

sabit iletken

hareketli iletken

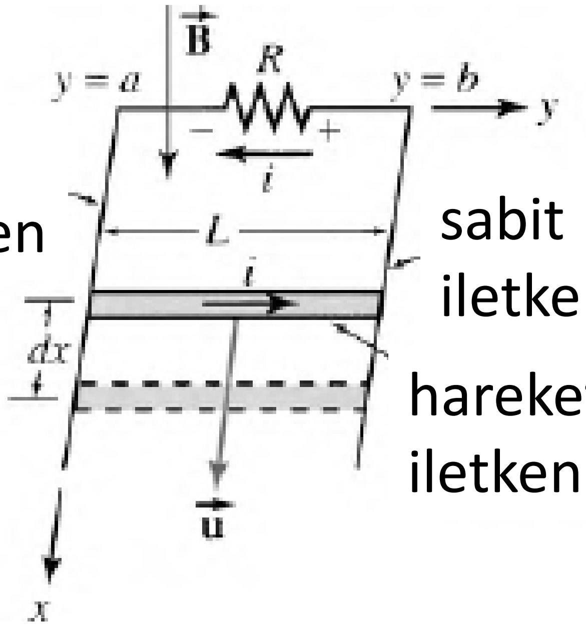
Akım geçen tele manyetik alanda etki eden manyetik kuvvetin

$$\vec{\mathbf{F}}_m = i\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{B}} = -BiL\vec{\mathbf{a}}_x$$

ile ifade edildiğini biliyoruz. Telin hareket yönüne zıt yönde bir kuvvet var. Yani teli +x yönünde hareket ettirmek için dışardan uygulamamız gereken kuvvet

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = -\vec{\mathbf{F}}_m = BiL\vec{\mathbf{a}}_x$$

olmalıdır.



sabit iletken

sabit iletken

hareketli iletken

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_m = BiL\vec{a}_x$$

Bu kuvveti dışardan uygulayarak teli dx kadar hareket ettirmemiz durumunda yapılan iş

$$dW = BLi\,dx = BLiu\,dt$$

$$dW = BLu\,dq$$

olur. Bu durumda indüklenmiş elektromotor kuvvet:

$$e = \frac{dW}{dq} = BLu$$

Birim pozitif yük başına yapılan iş

Hareketsel elektromotor kuvvet icin genel bir ifade yazmak istersek:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = -\int_c i\,\overrightarrow{d\ell}_c \times \vec{\mathbf{B}}$$

Iletken tel icinde dis kuvvet tarafindan $\overrightarrow{d\ell}$ yolu boyunca yapilan is

$$dW = \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} \cdot \overrightarrow{d\ell} = -i\,\overrightarrow{d\ell} \cdot \int_c \overrightarrow{d\ell}_c \times \vec{\mathbf{B}}$$

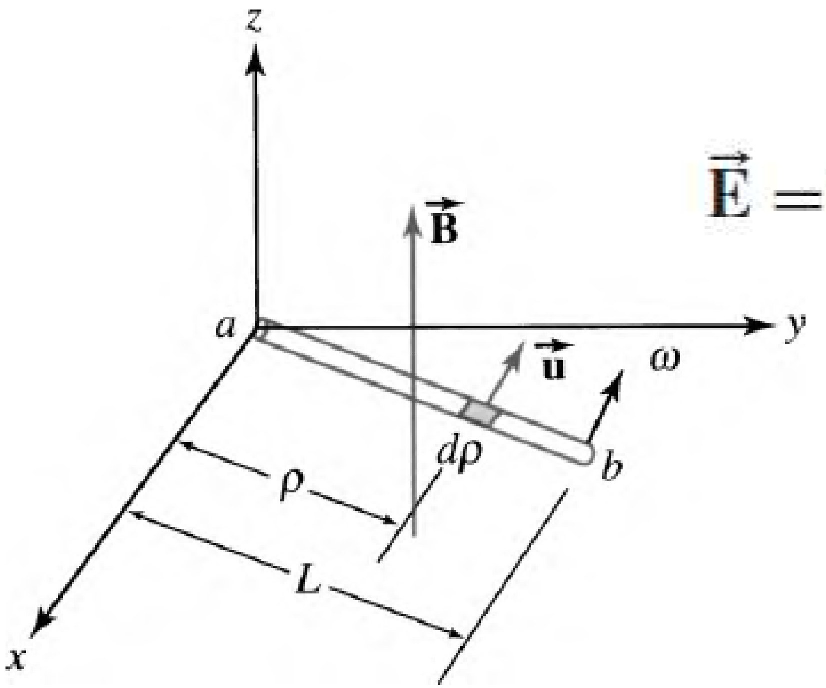
$$i = \frac{dq}{dt} \qquad \vec{\mathbf{u}} = \frac{\overrightarrow{d\ell}}{dt}$$

is ifadesinde yerine yerlestirilirse:

$$e = \frac{dW}{dq} = -\vec{\mathbf{u}} \cdot \int_c \overrightarrow{d\ell}_c \times \vec{\mathbf{B}}$$

$$e = \int_c (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}}) \cdot \overrightarrow{d\ell}_c$$

ORNEK: L uzunlugundaki bakir tel orjin etrafinda ω acisal hizi ile manyetik alan icinde donmektedir. Telin ucalri arasinda induklenecek elektromotor kuvveti bulunuz



$$\vec{\mathbf{u}} = \rho\omega\vec{\mathbf{a}}_{\phi}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}} = \rho\omega B(\vec{\mathbf{a}}_{\phi} \times \vec{\mathbf{a}}_{z}) = \rho\omega B\vec{\mathbf{a}}_{\rho}$$

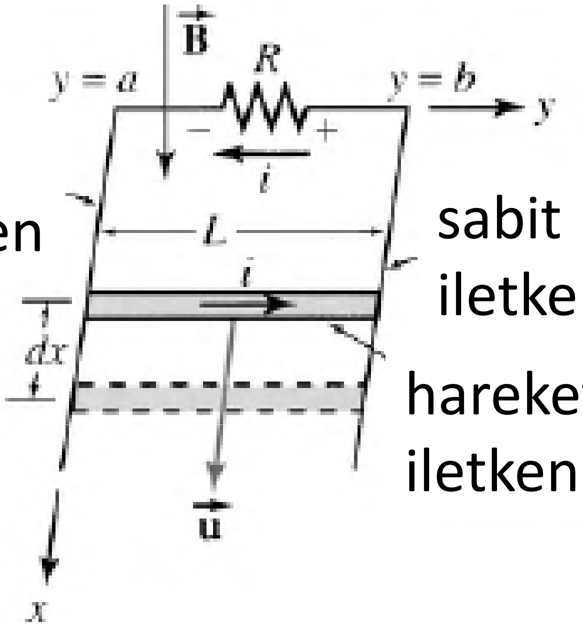
$$e = \int_{c} (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}}) \cdot \vec{d\ell}_{c}$$

$$e_{ba} = \omega B \int_{0}^{L} \rho \, d\rho$$

$$= \tfrac{1}{2} B\omega L^{2}$$

FARADAY INDUKSIYON YASASI

sabit iletken



sabit iletken

hareketli iletken

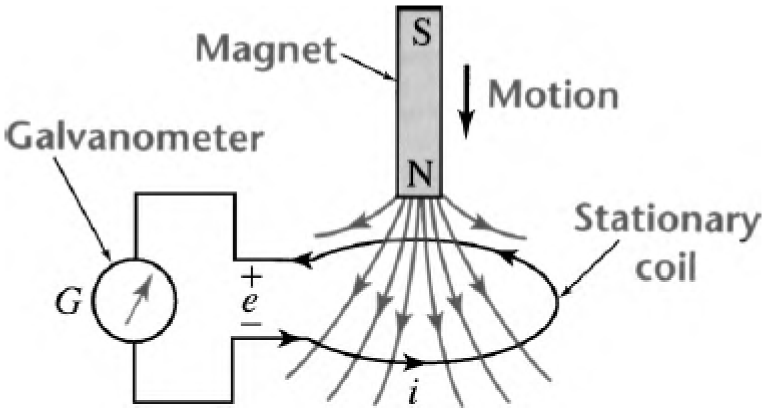
$$\overrightarrow{ds} = L\, dx\, \vec{a}_z$$

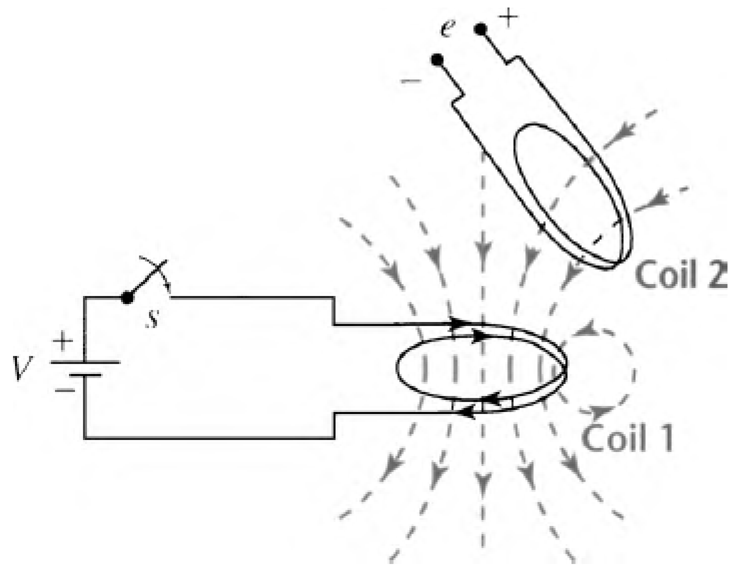
$$d\Phi = \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = -BL\, dx$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -BL\frac{dx}{dt} = -BLu$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

kapali yol boyunca induklenen elektromotor kuvvet,
yol tarafindan sinirilanan alandan
gecen manyetik akinin zamana gore degisim oraninin negatifine esittir



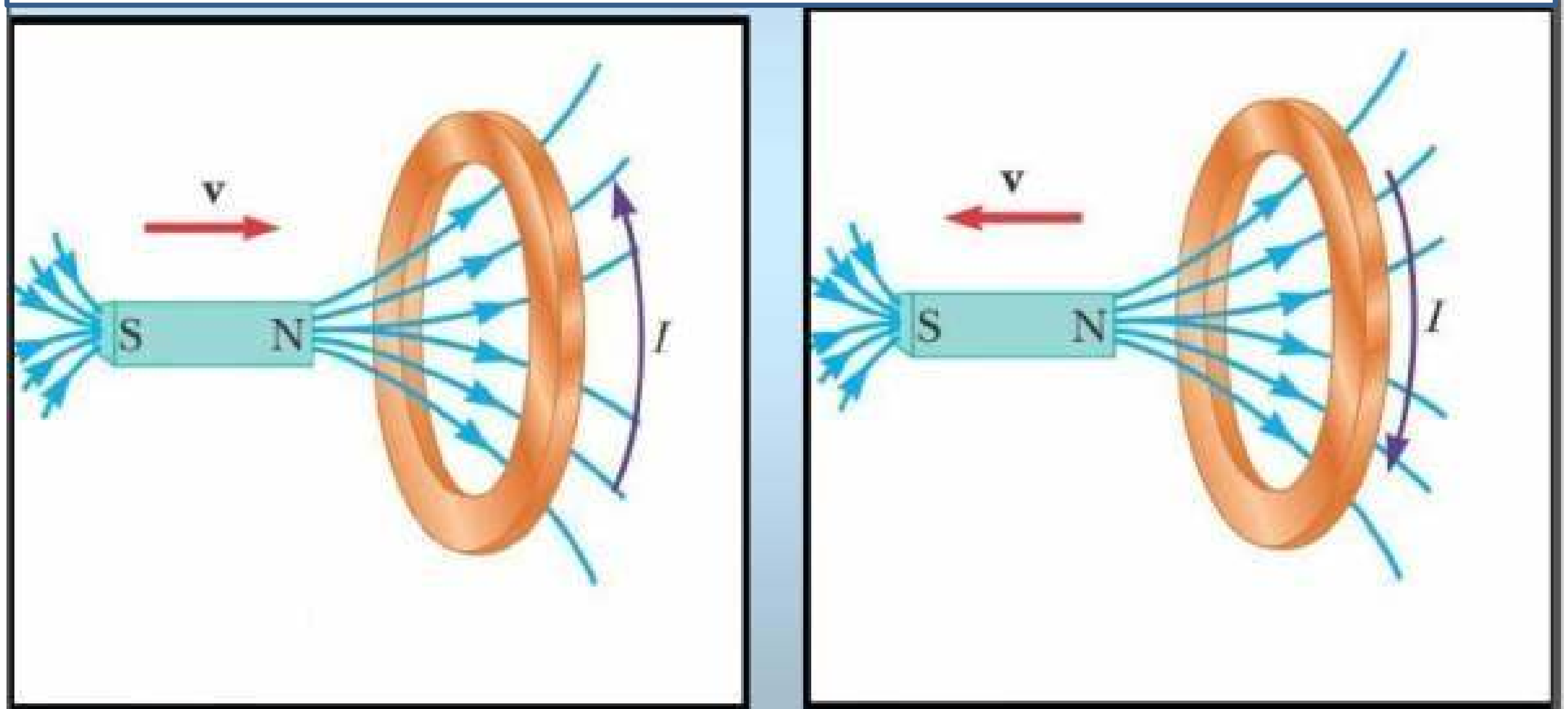


$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

bu ifadedeki negatif isaret LENZ YASASI olarak adlandrilir.

LENZ YASASI: Manyetik aki degisimiyle induklenen akimin olusturacagi manyetik alan,
akimi olusturan manyetik alani dengeleyecek yondedir.

LENZ YASASI



Ornek: 40 cm yaricapli cembersel iletken halka xy duzlemindedir ve 20 ohm direnci vardir. Manyetik aki yogunlugu

$$\vec{\mathbf{B}} = 0.2 \cos 500t \ \vec{\mathbf{a}}_x + 0.75 \sin 400t \ \vec{\mathbf{a}}_y + 1.2 \cos 314t \ \vec{\mathbf{a}}_z \ \mathrm{T},$$

olduguna gore halkada induklenen akimin etkin degerini bulunuz

$$\overrightarrow{d\mathbf{s}} = \rho \, d\rho \, d\phi \, \vec{\mathbf{a}}_z$$

$$d\Phi = \vec{\mathbf{B}} \cdot \overrightarrow{d\mathbf{s}} = 1.2\rho \, d\rho \, d\phi \, \cos 314t$$

$$\Phi = 1.2 \cos 314t \int_0^{0.4} \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\phi = 0.603 \cos 314t \ \mathrm{Wb}$$

Tesla . m^2

$$\Phi = \Phi_m \sin \omega t$$

$$= 0.603 \cos 314t$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega\Phi_m \sin 314t$$

$$E_m = N \Phi_m \omega$$ maksimum emk, bu ornek icin N=1

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}} E_m = \sqrt{2}\, \pi f N \Phi_m$$ etkin deger veya rms degeri

$$E = 4.44 \times 50 \times 1 \times 0.603$$

$$= 133.866\ V$$

MAXWELL DENKLEMI OLARAK FARADAY YASASI

$$e = \oint_c \vec{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

$$\Phi = \int_s \vec{\mathbf{B}} \cdot \overrightarrow{d\mathbf{s}}$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$ Faraday Yasasi

$$\oint_c \vec{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{d\ell} = -\frac{d}{dt}\int_s \vec{\mathbf{B}} \cdot \overrightarrow{d\mathbf{s}}$$

Uzayda sabitlenmis bir yuzey icin $$\oint_c \vec{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{d\ell} = -\int_s \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{d\mathbf{s}}$$

yazilabilir

Stokes teoremini kullanirsak:

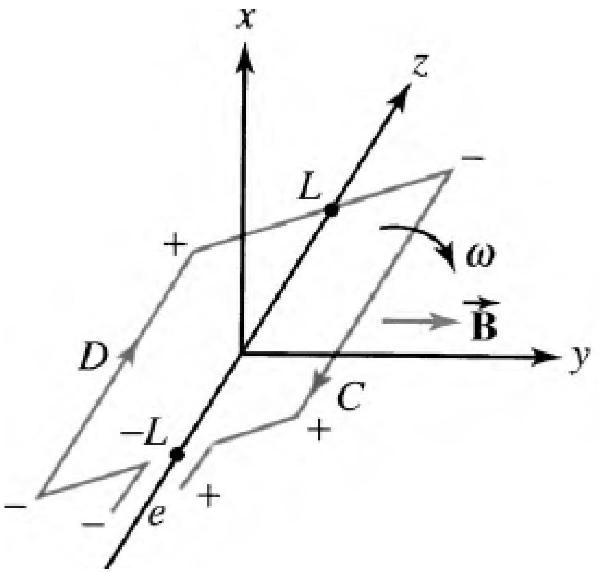
$$\int_s (\nabla \times \vec{\mathbf{F}}) \cdot \overrightarrow{d\mathbf{s}} = \oint_c \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

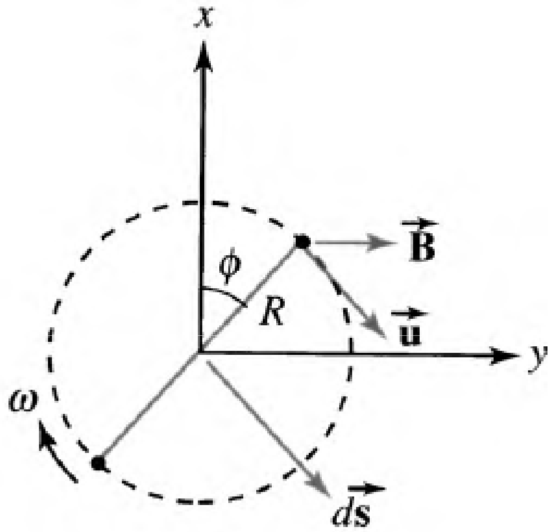
$$\int_s (\nabla \times \vec{\mathbf{E}}) \cdot \overrightarrow{d\mathbf{s}} = -\int_s \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \overrightarrow{d\mathbf{s}}$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

MAXWELL DENKLEMI OLARAK FARADAY YASASI ni bulmus oluruz

Ornek: N sarimli dikdortgen bobin manyetik alan icinde sekildeki gibi donmektedir. Bobinde induklenen elektromotor kuvveti Faraday induksiyon yasasiyla bulunuz

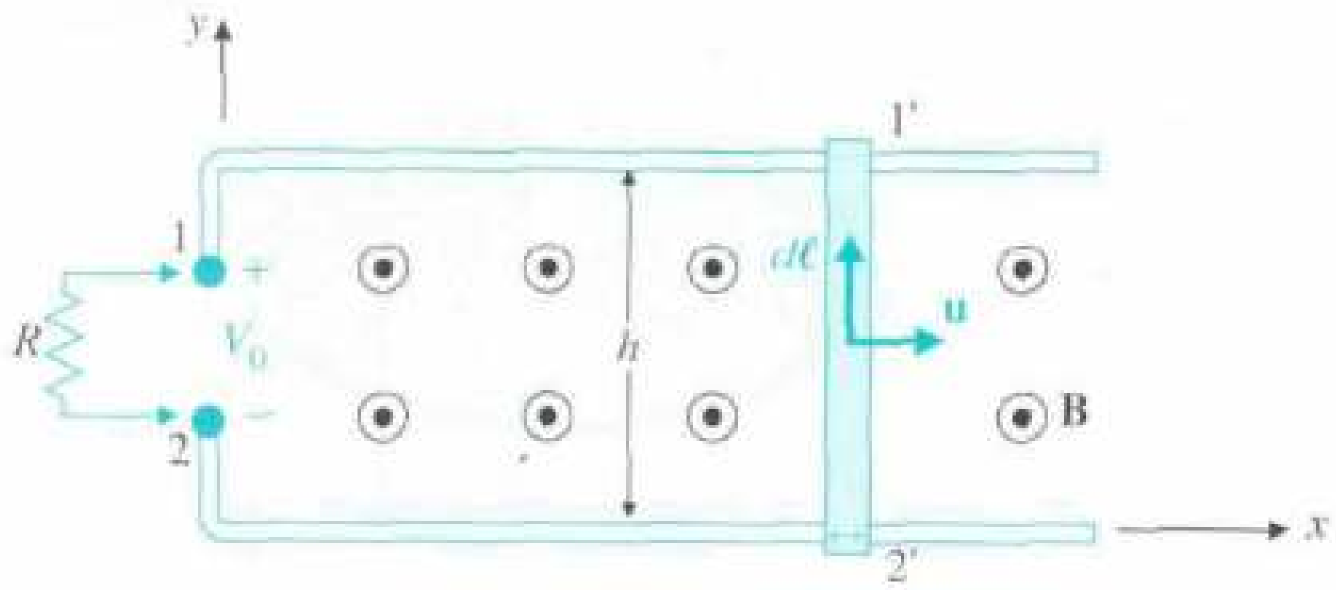




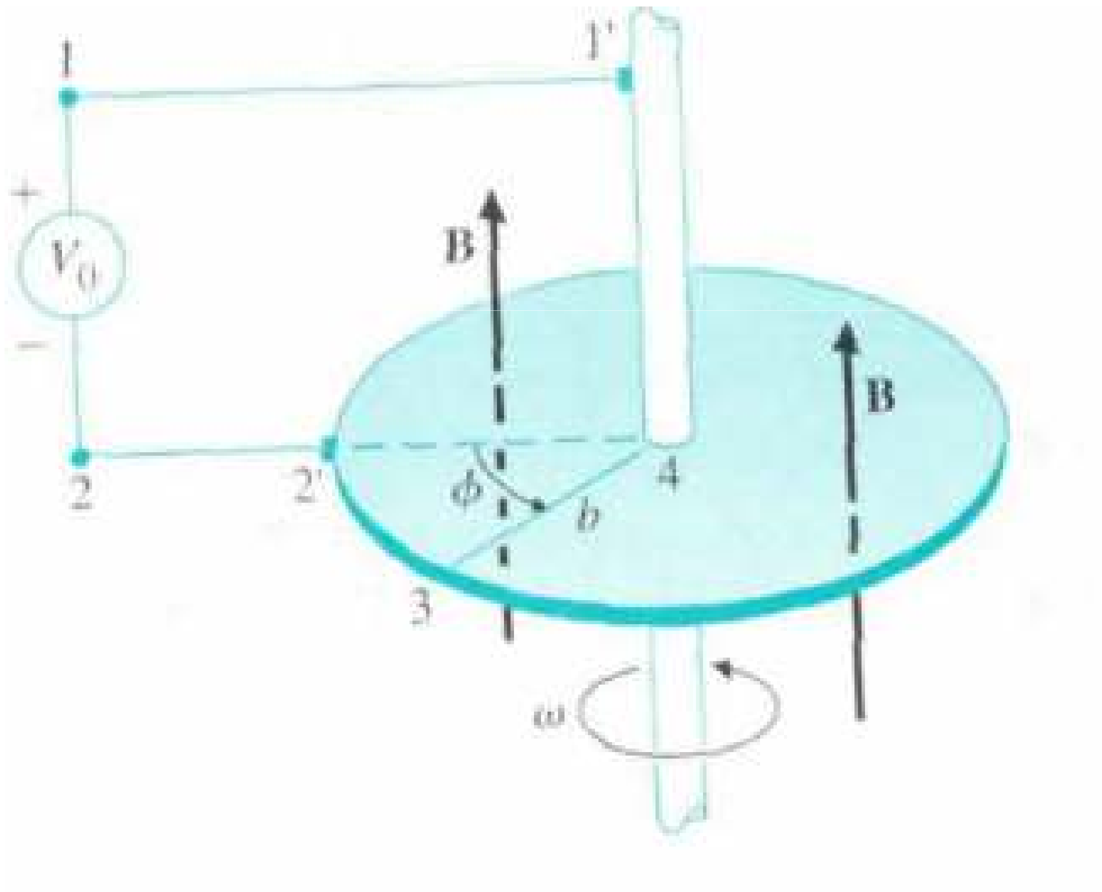
$$\Phi = \int_s \vec{\mathbf{B}} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_s (\vec{\mathbf{a}}_y \cdot \vec{\mathbf{a}}_\rho) B\, ds = B \cos\omega t \int_s ds = BA \cos\omega t$$

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt} = BAN\omega \sin\omega t$$

SORU: Sekilde manyetik alan icindeki iletken raylar uzerinde kaymakta olan metal cubuk gorulmektedir. a) 1 ve 2 uclari arasinda induklenecek voltaji b) bu uclara bir R direnci baglanirsa harcanacak gucu c) bu gucun, metal cubugu cekmek icin harcanacak mekanik guce esit oldugunu gosteriniz



SORU: Sekilde manyetik alan icinde ω acisal hiziyla donmekte olan b yaricapli Faraday disk jenaratorun
1 ve 2 uclarinda olusturacagi acik devre voltajini bulunuz.



SORU: Onceki sorudaki Faraday disk jenaratorun 1 ve 2 uclarinda olusturacagi acik devre voltajini

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

ifadesini kullanarak bulunuz.